Mécanique Quantique

Exercice 1 : faisceaux continus de particules libres.
Le cyclotron industriel Cyclone 30 permet d'accélérer les ions jusqu'à 30MeV.
a) Calculer la longueur d'onde de de Broglie de l'onde plane associée à un faisceau de protons d'énergie $E = 10$ MeV. Relier la norme k du vecteur d'onde et l'énergie E d'un quanton. Ecrire la fonction d'onde représentant le flux ininterrompu de protons produits par un cyclotron.
b) On utilise à présent le cyclotron pour produire un faisceau de particules alpha d'énergie $E = 30$ MeV. L'intensité du courant de charges associé est de $I = 10\mu$A, le diamètre du faisceau est de $a = 1$ mm. Déterminer k numériquement. Déterminer littéralement l'expression du pré-facteur ψ_0 de la fonction d'onde puis faire l'application numérique.
Donnée : masse d'une particule alpha : $m_\alpha = 6,64.10^{-27}$kg.

Exercice 2 : état non stationnaire d'un quanton dans un puits de profondeur infinie.
Un quanton de masse m, confiné dans un puits de potentiel infini de largeur a, est dans un état décrit, pour x compris entre 0 et a par la fonction d'onde $\psi(x,t)$ telle que l'on ait initialement à $t = 0$:

$$\psi(x, t=0) = \Phi(x) = \frac{4}{\sqrt{5a}} \sin^3\left(\pi \frac{x}{a}\right)$$

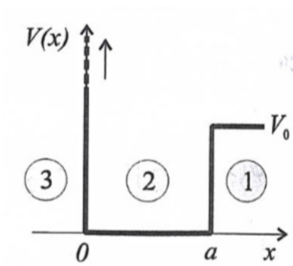
On précise que les fonctions d'onde des états stationnaires de quanton dans ce puits sont données par :

$$\psi_n(x,t) = \Phi_n(x) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\pi\frac{x}{a}\right) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \qquad \text{avec} \quad E_n = n^2 \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

a) Ecrire la fonction $\Phi(x)$ en fonction des fonctions $\Phi_n(x)$ et en déduire l'expression de $\psi(x,t)$.
b) Etablir l'expression de la densité de probabilité de présence $\rho_p(x,t)$ du quanton.
Donnée : on rappelle $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$.

Exercice 3 : états stationnaires dans un potentiel uniforme par morceaux.
Soit a une longueur positive. Une particule de masse m évolue dans le potentiel $V(x)$ suivant :
- pour $x < 0$, $V(x) \longmapsto +\infty$, région inaccessible pour la particule (milieu noté (3)).
- pour $0 \leq x \leq a$ $V(x) = 0$, région notée (2).
- pour $x > a$, $V(x) = V_0$, région notée (1).

Notons $\psi(x,t) = \phi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}}$, avec $E > 0$ la fonction d'onde stationnaire de la particule d'énergie E dans la région (2).



a) Montrer que l'énergie des états $E < V_0$ est solution de l'équation :

$$\tan\left(\frac{a\sqrt{2mE}}{\hbar}\right) = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}$$

b) Esquisser, sans résoudre d'équation, l'allure de la fonction $\phi(x)$ à l'état fondamental de la particule.

Exercice 4 : gaz quantique ou classique ?
On considère de l'hélium gazeux à température ambiante et à la pression atmosphérique. L'énergie cinétique moyenne d'un atome d'hélium est égale à : $E = \frac{3}{2}k_B T$, où k_B est la constante de Boltzmann.
a) Déterminer et évaluer numériquement la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'hélium. Calculer la longueur d'onde de de Broglie correspondante. La comparer à la distance moyenne entre deux atomes d'hélium.
b) On s'attend à ce que les effets quantiques puissent jouer un rôle lorsque la longueur d'onde de de Broglie est de

l'ordre de grandeur ou plus grande que la distance moyenne interatomique. Expliquer cela, et dire si l'étude de ce gaz relève de la mécanique quantique.
c) Lors de la formation d'un cristal métallique, on suppose que chaque atome du cristal fournit un électron. L'ensemble de ces électrons libres constitue un gaz où l'énergie de chaque électron est de l'ordre de l'électron-volt. Reprendre les questions précédentes dans le cas du gaz d'électrons libres du métal.
Données : une mole d'hélium gazeux occupe 24L; $M_{Cu} = 63$ g.mol^{-1} et $\mu_{Cu} = 8,9.10^3$ kg.cm^{-3}.

Exercice 5 : modèle de Bohr de l'atome.
Pour expliquer la stabilité de l'atome, Bohr imagina que les électrons devaient se mouvoir sur des orbites circulaires. Sur la première orbite de rayon a_0 la quantité de mouvement vérifie $p_0 = \hbar/a_0$.
a) Vérifier que cette relation revient à considérer que l'onde associée à l'électron sur une telle orbite se retrouve identique à elle-même au bout d'un tour.
b) En utilisant un modèle classique de l'interaction entre le noyau et l'électron, exprimer a_0 en fonction de constantes fondamentales et faites l'application numérique dans le cas de l'atome d'hydrogène. Exprimer de même l'énergie ttale de l'électron et le moment cinétique associés.
c) En généralisant la relation discutée en a), montrer l'existence d'orbites d'énergie plus élevée, quantifiées par un entier n, dont on exprimera les caractéristiques en fonction de celles de la première orbite et de n.
d) Afin que l'on puisse parler de trajectoire au sens classique, quelle limitation doit-on imposer aux indéterminations Δx et Δp pour la première orbite ? Montrer que cela est incompatible avec l'inégalité d'Heisenberg, et conclure quant à la validité du modèle.

Exercice 6 : laser à rubis.
Un laser à rubis émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 694,3$ nm. En admettant que cette émission est due à la transition $2 \longrightarrow 1$ d'un électron confiné dans un puits infini de longueur a, calculer la valeur numérique de a.

Exercice 7 : proton dans un noyau.
Déterminer les valeurs en MeV des trois premiers niveaux d'énergie d'un proton confiné dans un puits de largeur $a = 5,0$ fm (taille caractéristique d'un noyau). Calculer la longueur d'onde du rayonnement émis lors des transitions $3 \longrightarrow 1$ et $2 \longrightarrow 1$, et caractériser le domaine spectral associé.

Exercice 8 : puits infiniment profond et infiniment mince.
On étudie les états stationnaires $\psi(x,t) = \phi(x)\exp(-iEt/\hbar)$ d'une particule d'énergie E dans un piuts de potentiel tel que : $V(|x|> a/2) = 0$ et $V(|x|< a/2) = -V_0$.
a) On suppose que : $a \to 0$ et $V_0 \to +\infty$, le produit aV_0 restant constant. On admet que $\phi(x)$ est continue en $x = 0$. En intégrant l'équation de Schrödinger pour $\Phi(x)$ entre $-a/2$ et $a/2$, montrer que la dérivée première Φ' subit une discontinuité finie :

$$\phi'(0^+) - \phi'(0^-) = \frac{-2mV_0 a\phi(0)}{\hbar^2}$$

b) On cherche un état lié (E<0) pair. Exprimer $\phi(x)$ pour x>0 et x<0. En déduire l'existence d'une solution et déterminer son énergie. Existe-t-il des états liés impairs ?

Exercice 9 : courant de probabilité.
Pour une particule décrite par la fonction d'onde $\psi(x,t)$ solution de l'équation de Schrödinger associée à un potentiel $V(x)$, on introduit le courant de probabilité :

$$j = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

dont on admet qu'il peut s'interpréter comme la probabilité qu'a la particule de traverser le plan d'abscisse x entre les instants t et $t+dt$.
a) Etablir l'équation de conservation :

$$\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = 0$$

et donner sa signification physique.
b) On envisage une particule se déplaçant dans un potentiel $V(x) = V_0$, constant sur tout l'espace, dans le sens des x croissants avec une énergie E et une quantité de mouvement p. Expliciter $\psi(x,t)$ et j(x,t) et vérifier : $j(x,t) = |\psi(x,t)|^2 p/m$. Interpréter.

c) On envisage le cas d'une particule se déplaçant dans un potentiel $V(x) = V_0$ constant dans un domaine allant jusqu'à $x \to +\infty$ avec une énergie $E < V_0$. Expliciter $\psi(x,t)$ et vérifier que $j(x,t) = 0$.
d) On envisage le cas d'une particule se déplaçant dans un potentiel $V(x) = V_0$ constant dans un domaine borné entre $x = 0$ et $x = L$ avec une énergie $E < V_0$. Montrer que le courant de probabilité résulte des interférences entre ces deux ondes.

Exercice 10 : étalement d'un paquet d'ondes.
On considère un quanton libre de masse m.
a) Retrouver la relation de dispersion associée à sa fonction d'onde.

On considère que l'état du quanton est représenté par un paquet d'ndes formé d'ondes planes progressives dont les vecteurs d'onde sont distribués autour d'une valeur moyenne k_0 avec une dispersion Δk qui détermine l'extension spatiale considérée comme minimale Δx_0.
b) Rappeler la définition de la vitesse de groupe et déterminer son expression.
c) En utilisant la relation de dispersion, montrer qu'à la largeur Δk est associée une dispersion de la vitesse de groupe Δv_g que l'on exprimera en fonction de Δk.
Par un raisonnement semi-quantitatif issu d'un redécoupage du paquet d'ondes en sous-paquets de plus petite largeur spectrale, en déduire la largeur du paquet d'ondes $\Delta x(t)$ après un déplacement d'une durée t depuis l'origine.
d) Déterminer l'instant t_0 au bout duquel la largeur du paquet d'ondes a doublé. On fera l'application numérique pour un électron confiné dans un atome (modèle 1D) avec $\Delta x_0 = 0,1$ nm.