Mouvement dans un champ de force newtonien

Des données numériques sont rassemblées en fin de partie 1 et pourront être utilisées dans tous les exercices.

Exercice 1 : modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

À la base du modèle de Bohr se trouve le modèle planétaire d'atome d'hydrogène : un électron de masse $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg et charge $-e = -1,6 \times 10^{-19}$ C est en orbite circulaire autour d'un proton immobile en O dans le référentiel d'étude galiléen, de charge $+e$.

L'expérience montre que l'atome d'hydrogène ne peut émettre ou absorber des photons ne possédant que certaines longueurs d'ondes bien précises. Afin de reproduire ces résultats, Niels Bohr a proposé de quantifier la norme du moment cinétique par $||\vec{L_O}|| = n\hbar$, avec $\hbar$ la constante de Planck réduite et n un entier naturel non nul.

1. Retrouver le lien entre la norme de la vitesse et le rayon de l'orbite circulaire.
2. Montrer que la quantification de la norme du moment cinétique en O conduit à n'envisager que des orbites de rayon $r_n = n^2 r_1$, et d'énergies $E_n = -E_1/n^2$ où le rayono de Bohr r_1 et l'énergie E_1 snt à exprimer en fonction de ϵ_0, e, m et $\hbar$.
3. Faire les applications numériques. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 2 : Vostok 1

Le premier vaisseau spatial avec un humain à bord est le Vostok 1 (1961). L'engin était de masse $m = 6725$ kg, et la mission a duré 108 minutes.

Le périgée P correspond à une distance $h_P = 169$ km de la terre, et l'apogée A à une distance $h_1 = 315$ km de la Terre.

1. Calculer la période de révolution de l'engin.
2. Exprimer la vitesse du satellite à son passage à l'altitude h en fonction de h, h_A, h_P, de la masse de la Terre M_T, du rayon R_T de la Terre, et d'autres constantes fondamentales.
3. Faire les applications numériques pour v_A et v_P.

Exercice 3 : ellipse de transfert

Un satellite de masse m tourne autour de la Terre de masse M_T sur une orbite circulaire basse de rayon r_1 (à la vitesse v_1). On veut le transférer sur une orbite haute de rayon $r_2 > r_1$ (où sa vitesse est alors égale à v_2). On suppose les deux orbites coplanaires.

Pour effectuer ce transfert, on lui fait décrire une demi-ellipse de transfert (dite orbite de Hohmann) dont un de ses foyers est le centre de la Terre, et qui se raccorde tangentiellement aux deux orbites circulaires précédentes. On allume donc les propulseurs du satellite pendant une durée très brève au début et à la fin de cette demi-ellipse, ce qui correspond à communiquer à chaque fois au satellite un supplément de vitesse (sans changement de direction) de manière presque immédiate.

1. Donner l'expression littérale des vitesses v_1 et v_2.
2. Faire un schéma explicatif pour bien comprendre la situation.
3. Calculer les vitesses v_1 et v_2 sur les deux orbites circulaires.
4. Calculer les vitesses v_1' et v_2' correspondant respectivement au périgée et à l'apogée sur l'orbite de transfert.
5. Calculer la durée ΔT du transfert.

Données : $r_1 = 6,7 \times 10^3$ km ; $r_2 = 4,2 \times 10^4$ km

Exercice 4 : freinage d'un satellite

Le référentiel géocentrique est supposé galiléen, la Terre est sphérique de centre O, de rayon R_T, de masse M_T. Un satellite est place sur une orbite circulaire autour de la Terre de rayon $r = R_T + z$ (z est l'altitude du satellite). On note g_0 l'intensité de la pesanteur correspondant à $z = 0$. Dans les hautes couches de l'atmosphère, le satellite subit une force de frottement $\vec{f} = -\frac{km}{z} v\vec{v}$ de norme très inférieure à l'attraction gravitationnelle terrestre, où k est une constante positive adimensionnée. Dans ces conditions, l'obite du satellite demeure quasi-circulaire. Sur un tour, on a donc : $\Delta z \ll z$.

1. Justifier qualitativement la dépendance de la force vis-à-vis de v et de z.
2. Montrer que le mouvement du satellite reste plan malgré la présence de la force de frottements.
3. Exprimer la vitesse $v(z)$ du satellite, son énergie mécanique $E_m(z)$ et sa période $T(z)$, en fonction de paramètres pertinents en l'absence de frottements. Ensuite, en considérant des frottements faibles et une trajectoire quasi-circulaire, exprimer la variation de vitesse Δv en fonction de la variation d'altitude Δz et de $T(z)$.
4. Exprimer le travail des forces de frottements au cours d'un tour à l'altitude z.
5. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déduire la variationΔz d'altitude en fonction de k, R_T et z.
6. Commenter le signe de Δv et de Δz.

Eercice 5 : alerte météorite

Un météore, que l'on assimile à un point matériel M de masse m négligéable devant la masse de la Terre M_T, arrive de l'infini avec une vitesse $\vec{v}_0$ par rapport à la Terre. Son paramètre d'impact est : $OH = h$, où O correspond au centre de la Terre. On note S le point de trajectoire le plus proche de la Terre et $\vec{L_0}$ le moment cinétique du point M par rapport à O.

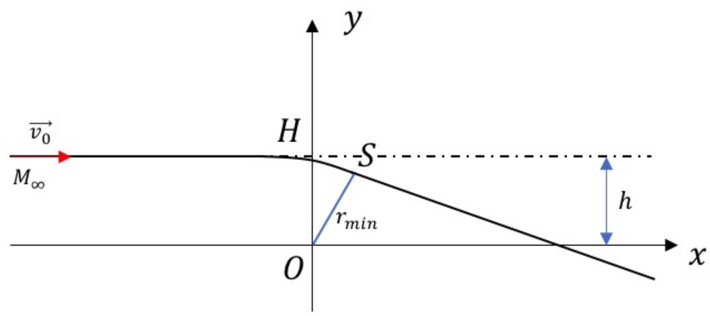

FIGURE 1: Arrivée à l'infini d'un météore

Exprimer r_{min}, la distance de plus courte approche de la Terre par le météore, en fonction de v_0, h, M_T et de la constante de gravitation $\mathcal{G}$. Faire l'application numérique, et en déduire si le météore va s'écraser sur la Terre.
Données : $v_0 = 2,0$ km/s; $h = 1,4 \times 10^5$ km

DONNÉES NUMÉRIQUES :

— constante gravitationnelle : $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
— masse de la Terre : $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg
— rayon de la Terre : $R_T = 6,37 \times 10^3$ km
— intensité de la pesanteur au niveau de la mer : $g_0 = 9,8$ m.s^{-2}
— constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s
— permitivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 9,0 \times 10^{-12}$ C^2.m^{-2}.N^{-1}