Endomorphismes symétriques

Sauf contre-indication $(E, <>)$ désigne un espace préhilbertien réel de dimension n.

Exercice 1. *(caractérisation des projecteurs orthogonaux, à savoir faire)*
On considère $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si il est 1- lipschitzien (i.e. si et seulement si : $\forall x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||$).

Exercice 2. *(inégalité d'Hadammard, à savoir faire)*
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E et $(x_1, ..., x_n)$ une famille de vecteurs de E.
Montrer que :

$$|\det_{(e_1,...,e_n)}(x_1, ..., x_n)| \leq ||x_1|| \times ... \times ||x_n||$$

avec égalité si et seulement si un des vecteurs est nul, ou si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est orthogonale.

Exercice 3. *(matrice de Gram, classique)*
Soient $(x_1, ..., x_p)$ des vecteurs de E. On appelle matrice de Gram de $(x_1, ..., x_p)$ la matrice $G(x_1, ..., x_p) = (< x_i, x_j >)_{1 \leq i,j \leq p}$
Soit $(e_1, ..., e_q)$ une base orthnonormée de Vect$(x_1, ..., x_p)$, et on note P la matrice de $(x_1, ...x_p)$ dans $(e_1, ...e_q)$.

a) Montrer que $M =^t PP$.

b) Montrer que $rgM = rgP$.

c) On peut utiliser les matrices de Gram pour déterminer la distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $(f_1, ...f_p)$ une base orthonormée de F et $(y_1, ...y_p)$ une base quelconque de F. Soit $x \in E$. Rappeler l'expression du projeté orthogonal de x sur F. On le note $p(x)$. On note $d(x, F) = ||x - p(x)||^2$ la distance de x à F. Montrer que :

$$d(x, F)^2 = \frac{\det(y_1, ...y_p, x)}{\det(y_1, ...y_p)}$$

Exercice 4.
Déerminer l'ensemble des $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad < x, y >= 0 \quad \Rightarrow \quad < u(x), u(y) >= 0$$

Exercice 5.
Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des fermés bornés (compacts).

Exercice 6. *(un autre classique autour des projecteurs)*
On considère $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que p est symétrique si et seulement si p est un projecteur orthogonal.

Exercice 7. *(deux démonstrations du théorème spectral)*
On cherche dans cet exercice à démontrer le théorème spectral de deux manières différentes. Soit $u \in S(E)$.
1$^{\text{ère}}$ méthode :

1. Soit F un sous-espace stable par u. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par u.
2. Montrer l'existence d'une valeur propre réelle pour u.

3. Conclure par récurrence.

2$^{\text{è}}$ méthode :
Faire une récurrence en étudiant les cas $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice 8.
Soit A une matrice carrée réelle de taille n. Montrer que $A^t A$ et ${}^t AA$ sont orthosemblables.
Ind. On pourra montrer, dans un premier temps, que pour deux matrices B et C quelconques : $\chi_{CB} = \chi_{BC}$.

Exercice 9.
Soient A et B deux matrices symétriques réelles. Montrer que :

$$\forall \lambda \in Sp(A+B), \quad \min Sp(A) + \min Sp(B) \leq \lambda \leq \max Sp(A) + \max Sp(B)$$

Exercice 10. *(endomorphismes symétriques positifs et définis positifs)*

Définition : soit $u \in S(E)$. u est positif (resp. défini positif) si et seulement si : $\forall x \in E\backslash\{0\}, < x, u(x) > \geq 0$ (resp. $< x, u(x) > 0$). On note respectivement $S^+(E)$ et $S^{++}(E)$ les endormophismes symétriques positifs et les endomorphismes symétriques positifs définis de E (pour les matrices, on note ces ensembles $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

1. Montrer que $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ne sont pas des espaces vectoriels.
2. Montrer que $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ est fermé et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ n'est pas fermé.
3. Soit $u \in S(E)$, montrer que :
$$u \in S^+(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^+ \qquad \text{et} \qquad u \in S^{++}(E) \iff Sp(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$$
4. Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer l'existence d'une matrice $B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ vérifiant $B^2 = A$. On dit que B est la racine carrée de A.
Bonus : montrer l'unicité de B.
5. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.Montrer que $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. si et seulement si il existe une matrice réelle Q telle que : $A = {}^t QQ$ (id est si et seulement si A est une matrice de Gram).
6. Soit $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11. *(décomposition polaire, se sert de l'exercice 10)*
Soit A une matrice réelle inversible.
Montrer l'existence et l'unicité d'un couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$A = OS$$

Exercice 12. *(matrice de covariance, se sert des résultats de l'exercice 10)*
Soit $(X_1, ..., X_n)$ des variables aléatoires. On note $A = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de covariance de $(X_1, ..., X_n)$.
Montrer que A est symétrique positif.

Exercice 13. *(d'après Polytechnique)*
Déterminer les matrices réelles nilpotentes et antisymétriques.

Exercice 14. *(d'après Centrale)*
Soit A une matrice réelle symétrique. On suppose qu'il existe un entier naturel m vérifiant : $A^m = I_n$.
Montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 15. *(d'après Polytechnique)*
Soit A une matrice réelle antisymétrique.
Montrer que le rang de A est pair.