Equations différentielles

I désigne, par la suite, un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

Exercice 1.
Résoudre les équations linéaires d'ordre 1 suivantes [1] :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$
2. $(x-1)y' + xy = \sin x$
3. $y' + y = 1/(1+e^x)$

Exercice 2.
Résoudre les équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants suivantes :

1. $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$
2. $y'' + 3y' + 2y = e^x$
3. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$
4. $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$
5. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\sin(x)$

Exercice 3.
Montrer que $xy' + y = \tan x$ admet une unique solution sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 4.
Résoudre sur l'intervalle $[0, 4\pi]$ l'équation différentielle :

$$y' \times \sin^3(x) = 2\cos x \times y$$

Préciser en particulier la dimension de l'espace des solutions.

Exercice 5.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' + \lambda y = 0$$

Déterminer les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ à l'aide du changement de variable $x = t^2$.

Exercice 6.
Trouver les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = \mathrm{ch}(x)$$

Exercice 7.
Trouver les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1$$

Exercice 8.
Trouver les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que [2] :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt$$

1. Préciser, à chaque fois, l'intervalle d'étude.
2. Montrer qu'une telle solution est c^∞, puis, à l'aide d'un développement limité, trouver une équation différentielle vérifiée par f

Exercice 9.
Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
a) On suppose que $f + f'$ est bornée. Montrer que f est bornée.
b) On suppose que $f'(x) + f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que f tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

Exercice 10. *(zéros isolés, à savoir faire)*
Soient $n \in \mathbb{N}^*, c_0, \dots c_{n-1}$ des applications continues de I dans $\mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle :

$$y(n) + \sum_{k=0}^{n-1} c_i y^{(i)} = 0$$

Montrer que toute solution non nulle de cette équation a ses zéros isolés [3].

Exercice 11. *(théorème de Sturm et une application)*
a) Soient q_1 et q_2 deux applications continues de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$, avec $q_1 \leq q_2$. On considère y_1 et y_2 deux applications C^2 de I dans $\mathbb{R}$, vérifiant : $y_1'' + q_1 y_1 = 0$ et $y_2'' + q_2 y_2 = 0$. On suppose y_1 non nulle de sorte que ses zéros sont isolés (voir exercice précédent). Si a et b sont deux zéros consécutifs de y_1 (avec $a \leq b$), montrer que y_2 s'annule sur $[a, b]$.
b) Soit ϕ une solution non identiquement nulle de $y'' = xy$. Montrer que ϕ possède au plus un zéro sur $\mathbb{R}^+$, et une infinité de zéros sur $\mathbb{R}^-$.

Exercice 12. *(raisonnement type "énergie")*
Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose $f > 0$ et $f' > 0$. Montrer que les solutions de $y'' + fy = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. *(autre raisonnement type "énergie")*
Soient $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = -xg(x)f'(x)$$

Montrer que f est bornée.

Exercice 14. *(équation d'Euler)*
Résoudre l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + 2xy' + y = 0$$

en utilisant le changement de variable $y(e^x) = z(x)$.

Exercice 15.
On considère, sur I, l'équation différentielle :

$$y'' + ay' + by = 0$$

où a et b sont des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.
Montrer que cette équation différentielle possède une base de solutions (f, g) avec f paire et g impaire si et seulement si a est impaire, et b est paire.

Exercice 16. *(d'après Centrale)*
Soit (E) : $2xy''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0. Que dire de leur rayon de convergence ?

Exercice 17. *(d'après Polytechnique)*
Déterminer les solutions de $y' = y^2$ définies sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3. Soit a un zéro de f. a est un zéro isolé s'il existe un voisinage de a dans lequel f n'admet pas d'autres zéros.