DEVOIR LIBRE

DL DE NIVEAU 1 FILIÈRE MP

RÉVISIONS ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

⋆ ⋆ ⋆

Toute affirmation doit être clairement et complètement justifiée.

Ce DL de niveau 1 présente quelques éléments de la théorie de Sturm sur les équations linéaires homogènes d'ordre 2 et les équations de Sturm-Liouville.

I Zéros simples

Définition

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Soit $t_0 \in I$. On dit que t_0 est un zéro simple de f si $f(t_0) = 0$ et $f'(t_0) \neq 0$.

1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un intervalle I. Soit $t_0 \in I$. Montrer que t_0 est un zéro simple de f si et seulement si il existe $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(t) = (t - t_0)\, g(t)$ avec $g(t_0) \neq 0$.

2. En déduire que, si une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I admet un zéro simple t_0, alors ce zéro est isolé, c'est-à-dire que sur un voisinage de t_0, la fonction f n'admet pas d'autres zéros. De plus, la fonction f change de signe en t_0.

Si une fonction n'a que des zéros simples, alors tous ses zéros sont isolés et elle change de signe à chaque zéro. On peut ainsi dénombrer des oscillations. Montrons que les solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 vérifient cette propriété.

3. Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

avec $p, q \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que les zéros d'une solution non nulle de (E) sont simples et isolés.

4. En déduire qu'une telle solution n'a qu'un nombre fini de zéros sur tout compact de I.

On peut désormais parler de zéros consécutifs dans les questions suivantes.

II Théorie de Sturm

5. Soient y et z deux solutions indépendantes de (E). Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y, il existe un et un seul zéro de z.
C'est le théorème de Sturm.

Définition

Une équation différentielle de la forme

$$(E') \quad (a(t)y')' + r(t)y = 0$$

où a est de classe $\mathcal{C}^1$ et r continue est appelée équation de Sturm-Liouville.

6. En multipliant (E) par une fonction astucieusement choisie, mettre (E) sous la forme d'une équation de Sturm-Liouville.

Soient les équations différentielles

$$\begin{aligned} (E_1) \quad & (a(t)x')' + r(t)x = 0 \\ (E_2) \quad & (b(t)y')' + s(t)y = 0 \end{aligned}$$

avec $a, b \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), r, s \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose

$$r \leqslant s \quad \text{et} \quad 0 < b \leqslant a$$

7. Soient $t_1 < t_2 \in I$ deux zéros consécutifs de x. On suppose que x et y ne sont pas proportionnels et que y ne s'annule pas sur $]t_1, t_2[$. On pose $W = \frac{x}{y}(ax'y - bxy')$. Montrer que

$$W' = (s-r)x^2 + (a-b)(x')^2 + b\left(x' - \frac{xy'}{y}\right)^2$$

8. Soient $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ tels que $\varepsilon + \varepsilon' < t_2 - t_1$. Montrer que

$$W(t_2 - \varepsilon') \underset{\varepsilon' \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$W(t_1 + \varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

9. En déduire que $\int_{t_1}^{t_2} b\left(x' - \frac{xy'}{y}\right)^2 \mathrm{d}t = 0$.

10. En déduire une contradiction.
On a donc montré que si x et y n'étaient pas proportionnels entre deux zéros consécutifs de x, alors y s'annule au moins une fois sur cet intervalle. C'est le théorème de comparaison de Sturm.

11. En déduire un minorant du nombre de zéros d'une solution y de (E_2) dans un intervalle $]\alpha, \beta[$ si une solution x de (E_1) a m zéros dans le même intervalle.

12. On considère l'équation (E_1), avec

$$a(t) \geqslant 1 \quad \text{et} \quad r(t) \leqslant \rho^2 \quad \text{avec} \quad \rho > 0$$

Montrer que deux zéros consécutifs $t_1 < t_2$ de x solution non nulle de (E_1) vérifient $t_2 - t_1 \geqslant \frac{\pi}{\rho}$.

13. On considère l'équation (E_2), avec

$$0 < b(t) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad s(t) \geqslant \sigma^2 \quad \text{avec} \quad \sigma > 0$$

Montrer que la distance entre dux zéros consécutifs de y solution non nulle de (E_2) est inférieure à $\frac{\pi}{\sigma}$.

* *
*