Compléments analyse

24 mars 2019

Première partie
Règle de Duhamel

1 Règle de D'Alembert

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ une série à termes strictement positifs, telle que $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ converge vers une limite l. Alors, si $l > 1$, la série diverge, si $l < 1$, elle converge, et si $l = 1$, on ne peut pas conclure.
Ce résultat peut se démontrer par lemme de comparaison logarithmique, ou directement par comparaison à partir d'un certain rang avec le terme général d'une série géométrique de raison $q \in [1, l]$.

2 Règle de Duhamel

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ une série à termes strictement positifs, telle que
$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 - \frac{s}{n} + o(\frac{1}{n})$ où $s \in \mathbb{R}$. Alors, la série converge si et seulement si $s > 1$.

La règle de Duhamel raffine en fait la règle de Duhamel dans le cas $l = 1$.

2.1 Démonstration

Posons $V_n = \ln(n^s U_n)$. Montrer que $v_{n+1} - v_n$ est le terme général d'une série convergente. Conclure.

Il existe aussi des démonstrations moins astucieuses mais plus longues.

Deuxième partie

Transformation d'Abel

3 Enoncé

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \; \sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_N B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n (a_{n+1} - a_n)$$

Dans certains cas, il est en fait plus simple de considérer cette nouvelle série. Cette méthode est appelée transformation d'Abel.

On remarque qu'il s'agit de l'analogue discret de l'intégration par parties.

4 Applications

4.1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} U_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que $nU_n \to 0$, puis que $\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \sum_{n=0} \infty n(U_n - U_{n+1})$.

Troisième partie

Formule de Stirling

5 Enoncé

$$n! \equiv \sqrt{2\pi} n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

L'énoncé de cette formule est exigible aux concours français et sa démonstration est une question classique.

6 Démonstration

6.1 Première étape

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $n! \equiv C n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
Indication : Poser $U_n = \ln \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}$ et montrer que $U_{n+1} - U_n$ est le terme général d'une série convergente.

6.2 Deuxième étape

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)^n dt$. Ces intégrales sont appelées intégrales de Wallis.
Trouver, par intégration par parties, une relation entre W_{n+2} et W_n.
Montrer que $W_{n+2} \leq W_{n+1} \ \leq W_n$. En déduire que $\frac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$.
Calculer W_0 et W_1. En déduire une expression de W_{2n} et W_{2n+1}, puis un équivalent de $\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}}$ grâce à la première étape. Conclure.

Quatrième partie

Théorème de Borel-Cantelli

Voici un théorème intéressant de probabilités, proche du programme, et dont le raisonnement est utile à maîtriser car proche de ceux à développer dans de nombreux exercices.
On peut aussi la trouver sous le nom de "loi du 0-1".
Elle est notamment une étape importante de la démonstration de la loi forte des grands nombres.

7 Enoncé

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. Alors, si la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge, la probabilité qu'une infinité de A_n se réalisent simultanément est nulle.
Si au contraire $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ diverge, et si les A_n sont mutuellement indépendants, alors une infinité de A_n se réaliseront presque sûrement.

8 Démonstration

On commence par définir la "limite sup" des A_n comme ceci :

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$$

En quoi cela correspond au résultat annoncé ?

Supposons que la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ converge.
On pose $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$. Montrer que :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim A_n.$$

Trouver un majorant de $\mathbb{P}(B_n)$ qui tend vers 0.
Conclure.

On suppose cette fois-ci que $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ diverge et que les A_n sont mutuellement indépendants, et on pose $B_n = \bigcap_{k \geq n} \overline{A_k}$. Montrer qu'on cherche en fait à montrer que $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = 0$.
Montrer que $\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim \mathbb{P}(B_n)$.
Montrer que :

$$\forall l \in \mathbb{N},\ \prod_{k=n}^{k=n+l} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \leq \exp(-\sum_{k=n}^{k=n+l} \mathbb{P}(A_k)).$$

En déduire que $\mathbb{P}(B_n) = 0$. Conclure.

Cinquième partie

Lemme de Gronwall

Soit K une constante, et f et g continues telles que $g \geq 0$ et :

$$\forall t \geq 0,\ f(t) \leq K + \int_0^t f(s)g(s)ds.$$

On va montrer que :

$$\forall t \geq 0,\ f(t) \leq K \exp(\int_0^t g(s)ds)$$

Résoudre l'équation différentielle en y suivante :

$$y' + gy = fg,\ y(0) = K.$$

Montrer que y est décroissante. Conclure.

Cette idée de trouver une équation différentielle adaptée et de la résoudre (puisqu'on sait résoudre de façon explicite les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et celles d'ordre 2 à coefficients constants). Cette équation peut être plus ou moins difficile à trouver, en général elle est assez naturelle.
Le lemme de Gronwall permet notamment de montrer l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Sixième partie

Transformées de Laplace et de Fourier

Ces considérations sont proches du programme et peuvent donner lieu à des exercices voire des sujets, notamment parce qu'elles fournissent la théorie qui

permet des calculs pour lesquels vous connaissez peut-être une méthode avec astuce.
Cela sert d'entraînement et n'est pas à connaître par coeur.

9 Transformée de Laplace

Pour f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$, on définit :

$$\forall p \text{ tel que cette intégrale existe, } \mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Supposons f telle que sa transformée de Laplace existe pour p assez grand et admettant une limite en 0^+. On peut alors montrer le théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p\mathcal{L}[f](p).$$

On pourra commencer par montrer le résultat pour des fonctions constantes, puis pour des fonctions de limite 0 en 0.

Supposons maintenant f admettant une limite en $+\infty$. On peut alors montrer le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0^+} p\mathcal{L}[f](p).$$

La transformée de Laplace peut par exemple servir au calcul de l'intégrale de Dirichlet.
Supposons f d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+$. Montrer la continuité de la fonction :

$$p \mapsto \mathcal{L}[f](p)$$

En déduire la valeur de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$$

10 Transformée de Fourier

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit ainsi sa transformée de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\xi t}dt$$

Cette transformée de Fourier est notamment utilisée en traitement du signal, puisqu'elle permet de passr du mode temporel au mode fréquentiel.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On se propose ici d'établir la formule de réciprocité :

$$f = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}(f)).$$

Tout d'abord, montrer que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} f(0)$$

On pose ensuite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}, F_n(\lambda) = \int_{-n}^{n} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}_+^*, \ \int_{-A}^{A} F_n(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = 2 \int_{x-n}^{x+n} f(x-u) \frac{\sin(Au)}{u} du$$

Conclure en utilisant les deux résultats précédents.

Septième partie

Calculs classiques d'intégrales et de séries

11 Intégrale de Gauss

On pose $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$. Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \to +\infty} I_n.$$

Calculer les I_n par récurrence en montrant que :

$$I_n = \sqrt{n} W_{2n+1} = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin(t)^{2n+1} dt.$$

Conclure grâce à la formule de Stirling.

D'autres méthodes de calcul sont bien sûr possibles, par exemple en utilisant le théorème de Fubini et en passant des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

12 Intégrale de Dirichlet

L'intégrale de Dirichlet est un exemple classique d'intégrale semi-convergente. Il s'agit de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

Un calcul de cette intégrale est possible en posant deux suites :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx \text{ et } K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx.$$

On montre alors que :

$$J_n = \frac{\pi}{2} \text{ , } K_n \to \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt, \text{ et } J_n - K_n \to 0.$$

D'autres méthodes de calcul sont possibles, par exemple en utilisant le théorème des résidus ou avec la transformée de Laplace (comme vu précédemment).

13 Fonction ζ

La fonction *zeta* de Riemann se définit sur le demi-plan des complexes de partie réelle strictement supérieure à 1 comme somme de la série de fonctions :

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

En prépa, seule cette définition est à connaître. *zeta* admet en fait un prolongement holomorphe sur le plan complexe privé de 1. Un calcul possible des valeurs de *zeta* pour les entiers pairs strictement positifs (reproduit ici) est proposé dans le sujet de la concentration "Autour des séries génératrices".

13.1

On définit les polynômes de Bernoulli de la façon suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ B_0(t) = 1 \text{ et } \forall k > 0,\ B_k'(t) = kB_{k-1}(t) \text{ et } \int_0^1 B_k(t)dt = 0.$$

On peut alors montrer qu'on a le développement en série entière en 0 suivant :

$$\frac{xe^{xt}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(t)x^k}{k!}$$

Ainsi en particulier la suite $(B_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est celle des nombres de Bernoulli.

13.2

Calculer $B_1(t)$ et $B_2(t)$.
Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = B_{2k}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0) = 0$$

13.3

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ on note } I(k,m) = \int_0^1 B_{2k}(t)\cos(m\pi t)dt.$$

Montrer que $I(0,m) = 0$. Par double intégration par parties, montrer que :

$$I(1,m) = \frac{2}{m^2\pi^2} \text{ si } m \text{ est pair et } 0 \text{ sinon.}$$

$$\forall k \geq 2,\ I(k,m) = -\frac{2k(2k-1)}{m^2\pi^2} I(k-1,m)$$

puis que

$$I(k,m) = \frac{(2k)!}{m^{2k}\pi^{2k}} \text{ si } m \text{ est pair et } 0 \text{ sinon.}$$

13.4

On considère maintenant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ B_k^*(t) = B_k(t) - B_k(0) \text{ et } I^*(k,m) = \int_0^1 B_{2k}^*(t)\cos(m\pi t)dt\ .$$

Montrer que $I^*(k,m) = I(k,m)$ puis que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}}\zeta(2k) = \sum_{m=1}^{+\infty} I^*(k,m).$$

13.5

Montrer que

$$\cos(mx) = \frac{\sin(\frac{2m+1}{2}x) - \sin(\frac{2m-1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

puis que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}}\zeta(2k) = \left(\lim_{N\to\infty}\int_0^1 B_{2k}^*(t)\frac{\sin(\frac{2N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 B_{2k}^*(t)dt.$$

Montrer que le premier terme vaut 0 et le second $\frac{1}{2}B_{2k}$.

En déduire les valeurs de ζ pour les entiers pairs strictement positifs.