

On a des interférences constructives dans le premier cas, destructives dans le second.

28) L'intensité optique mesurée sur le détecteur est $I = \langle \|\vec{E}_{tot}\|^2 \rangle_\tau$ les chevrons $\langle \cdot \rangle_\tau$ représentent la moyenne temporelle sur un temps $\tau \gg \frac{1}{\omega}$. Sachant que $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, montrer que :

$$I = I_0 \cos^2 \left[\frac{\Delta\phi}{2} \right] = I_0 \cos^2 (nk(L_1 - L_2))$$

avec I_0 que l'on déterminera.

$$\begin{aligned} \langle \|\vec{E}_{tot}\|^2 \rangle_\tau &= \langle \|\vec{E}_1 + \vec{E}_2\|^2 \rangle_\tau \\ &= \frac{1}{2} \Re \left((\vec{E}_1 + \vec{E}_2) (\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) \right) \\ &= \|\vec{E}_0\|^2 (r_s t_s)^2 (1 + \cos(\Delta\phi)) \\ &= \|\vec{E}_0\|^2 \times (r_s t_s)^2 \times 2 \cos^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) \end{aligned}$$

D'où $I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right)$, **où** $I_0 = \|\vec{E}_0\|^2 \times r_s^2 \times t_s^2 \times 2$.

En l'absence d'ondes gravitationnelles, on note respectivement L_1^0 et L_2^0 les longueurs des bras de l'interféromètre alignés selon les axes x et y . Suite au passage d'une onde gravitationnelle $h_+(t)$, les longueurs des bras sont modifiées respectivement de $\delta L_1(t)$ et $\delta L_2(t)$ de telle sorte que :

$$L_1(t) = L_1^0 + \delta L_1(t), \quad L_2(t) = L_2^0 + \delta L_2(t).$$

La longueur des bras de l'instrument est asservie de façon à ce que $nk(L_1^0 - L_2^0) = \frac{\phi_0}{2}$ avec ϕ_0 une phase dont on déterminera la valeur optimale dans une question ultérieure.

29) On pose $x = L_1 - L_2$ et $\delta x = \delta L_1 - \delta L_2$. Montrer que l'intensité en sortie de l'interféromètre est

$$I = I_0 \cos^2 \left[nk\delta x + \frac{\phi_0}{2} \right]$$

Le déphasage entre les deux ondes après passage des ondes gravitationnelles est $\Delta\phi = \phi_0 + \delta\phi$, où $\delta\phi = \frac{2\delta x \times nk}{\lambda}$, d'après ce qui précède. D'où

$$\begin{aligned} I &= \|\vec{E}_0\|^2 \times (r_s t_s)^2 (1 + \cos(\Delta\phi)) \\ &= I_0 \cos^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) \end{aligned}$$

avec $I_0 = \|\vec{E}_0\|^2 (r_s t_s)^2 \times 2$, donc

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\phi_0}{2} + nk\delta x \right)$$

- 30) Linéariser cette expression en supposant que $\delta x \ll \lambda$ et montrer que la variation d'intensité δI due au passage de l'onde gravitationnelle s'écrit :

$$\delta I = -I_0 n k \delta x \sin \phi_0$$

Pour quelles valeurs de ϕ_0 cette variation d'intensité est elle maximale ? À la lumière de vos réponses à la question 2, comment est donc réglé l'interféromètre au repos ?

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$, donc si $\delta x \ll \lambda$, $n k \delta x \ll 1$. (On linéarise : on veut une expression à l'ordre 1 en $\delta x k$)

$$\begin{aligned} I &= I_0 \left(\cos \left(\frac{\phi_0}{2} \right) \cos (nk\delta x) - \sin \left(\frac{\phi_0}{2} \right) \sin (nk\delta x) \right)^2 \\ &= I_0 \left(\cos \frac{\phi_0}{2} \left(1 - \frac{1}{2} (nk\delta x)^2 \right) - \sin \left(\frac{\phi_0}{2} \right) \times nk\delta x \right)^2 \\ &= I_0 \left(\cos^2 \left(\frac{\phi_0}{2} \right) \left(1 - \left(\frac{nk\delta x}{\text{ordre} \geq 2} \right)^2 \right)^2 + \sin^2 \frac{\phi_0}{2} \times \frac{(nk\delta x)^2}{\text{ordre} \geq 2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \times \cos \frac{\phi_0}{2} \sin \frac{\phi_0}{2} \times \left(1 - \frac{(nk\delta x)^2}{\text{ordre} \geq 2} \right) \times nk\delta x \right) \end{aligned}$$

D'où, à l'ordre 1,

$$\begin{aligned} I &= I_0 \cos^2 \frac{\phi_0}{2} - \underbrace{I_0 \times 2 \cos \frac{\phi_0}{2} \sin \frac{\phi_0}{2} \times nk\delta x}_{\delta I} \\ I &= I_0^{(0)} + \delta I \end{aligned}$$

Avec $\delta I = -I_0 \sin(\phi_0) \times nk\delta x$.

δI est maximale pour ϕ_0 tel que $|\delta I|$ est maximale, i.e. $\phi_0 = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

L'interféromètre doit donc être réglé de telle sorte que la distance entre le miroir mobile et la séparatrice soit la moyenne de celle observées pour les interférences destructives et constructives.

- 31) Relier la différence de phase $\Delta\phi$ à la différence de temps de parcours $\tau_x - \tau_y$ des photons empruntant les deux bras de l'interféromètre alignés selon les axes x et y . On pose $L_0 = \frac{L_1^0 + L_2^0}{2}$.

Grâce à la question 5 (partie I), montrer que $\tau_x - \tau_y = \frac{nh_+(t)(L_2^0 + L_1^0)}{c} + \frac{2n(L_1^0 - L_2^0)^2}{c}$ et à l'aide de la question 29, donner δx en fonction de $h_+(t)$ et L_0 .

$$\text{D'où } \tau_x - \tau_y = \frac{nh_+(t)(L_2^0 + L_1^0)}{c} + \frac{2n(L_1^0 - L_2^0)^2}{c}, \text{ et}$$

$$\Delta\phi = 2kn\delta x + \phi_0 = 2kn\delta x + 2kn(L_1^0 - L_2^0)$$

Qui plus est, $\Delta\phi = \omega(\tau_x - \tau_y) = kc(\tau_x - \tau_y)$.

D'où $2kn\delta x + 2kn(L_1^0 - L_2^0) = kh_+(t) \times 2L_0 + 2kn(L_1^0 - L_2^0)$, ainsi :

$$\delta x = h_+(t) \times L_0$$

- 32) Pour le détecteur VIRGO, les bras mesurent 3 km au repos. Pourquoi utiliser un interféromètre si grand ? Donner un ordre de grandeur de δx et de $\Delta\phi - \phi_0$. Vérifier l'approximation $\delta x \ll \lambda$ et comparer δx à des ordres de grandeurs usuels.

Plus L_0 est grand, plus, pour une même onde gravitationnelle $h_+(t)$, δx sera grand, et donc $\delta I \sim \delta x$ sera élevé. On prend $h_+(t) \sim 10^{-21}$. Alors, $\delta x \sim 10^{-21} \times 3.10^3 = 3.10^{-18}m$.

D'où $\Delta\phi - \phi_0 = 2nk\delta x \sim 3,5.10^{-11}rad$, $\delta x \sim 10^{-18}m \ll 10^{-6}m \sim \lambda$.

II.2 Cavité Fabry-Pérot

D'après les résultats précédents sur l'interféromètre de Michelson simple, la sensibilité de détection des ondes gravitationnelles est limitée par la taille des bras de l'instrument. Or construire des bras de longueur bien supérieure à 3 km représente un défi technologique, géographique et financier bien trop important, à moins d'aller dans l'espace. Pour contourner ce problème, les scientifiques ont eu l'idée d'ajouter au dispositif deux cavités Fabry-Pérot symbolisées figure 4 par deux paires de miroirs. Dans ces cavités la lumière réalise plusieurs aller-retours et augmente ainsi artificiellement son temps de parcours.

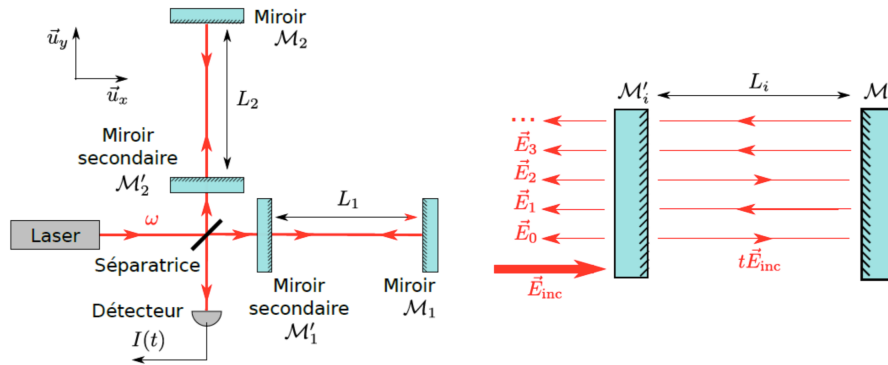


FIGURE 4 – Gauche : interféromètre de Michelson avec cavités Fabry-Pérot. Droite :  tude d'une cavité Fabry-Pérot.

Dans les questions suivantes, nous allons donc étudier une cavité Fabry-Pérot comme décrite sur la partie droite de la figure 4. Un miroir \mathcal{M}'_i semi-réfléchissant de coefficient de réflexion r'_i et de transmission t'_i est placé en vis-à-vis du miroir \mathcal{M}_i de réflexivité supposée parfaite ($r_i = -1$ et $t_i = 0$), à une distance L_i . On admettra que pour une onde venant de la gauche, au niveau de \mathcal{M}'_i on a $r'_i > 0$ réel et pour une onde venant de la droite le coefficient de réflexion vaut $-r'_i$.

Le champ électrique incident est une onde plane monochromatique progressive notée \vec{E}_{inc} avec les mêmes conventions que précédemment. On notera \vec{E}_p le p -ième champ électrique émergent du dispositif, déphasé par rapport au champ incident après p allers-retours à l'intérieur de la cavité, tel que sur la figure 4. L'indice optique de la cavité vaut n .

Dans les questions suivantes, on s'intéresse à la cavité Fabry-Pérot située dans le bras $i = 1$.

- 33)  crire le champ électrique \vec{E}_0 en fonction de \vec{E}_{inc} , puis le champ \vec{E}_1 en fonction du champ \vec{E}_{inc} , L_1 la longueur de la cavité sur le bras 1 et des coefficients de réflexion et de transmission. Déterminer le champ \vec{E}_p en fonction du champ \vec{E}_{p-1} pour $p > 2$. En déduire l'expression de \vec{E}_p en fonction de \vec{E}_{inc} pour $p > 1$.

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_0 &= r'_i \times \vec{E}_{inc} \\
 \vec{E}_1 &= (t'_i)^2 \times r_i \times \vec{E}_{inc} \times \exp(-i2knL_1) \\
 \vec{E}_p &= -r'_i \times r_i \times E_{p-1} \times \exp(-2iknL_1) \\
 \vec{E}_p &= (r'_i)^{p-1} \times (t'_i)^2 \times r_i \times \exp(-2iknL_1 \times p) \times \vec{E}_{inc}
 \end{aligned}$$

34) Le champ électrique total émergent de la cavité 1 est $\vec{E}'_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \vec{E}_p$. Montrer que

$$\vec{E}'_1 = \left[\frac{r'_1 - e^{-2jnkL_1}}{1 - r'_1 e^{-2jnkL_1}} \right] \vec{E}_{inc}$$

On admettra que $(t'_1)^2 + (r'_1)^2 = 1$.

On somme toutes ces ondes : $\vec{E}'_1 = \sum_{p=1}^{+\infty} \vec{E}_p + \vec{E}_0$, et on obtient bien ce qui est demandé :

$$\vec{E}'_1 = \left(\frac{r'_1 - e^{-2nikL_1}}{1 - r'_1 e^{-2nikL_1}} \right) \vec{E}_{inc}$$

35) On pose R_1 tel que $\vec{E}'_1 = R_1 \vec{E}_{inc}$. Montrer que $|R_1|^2 = 1$ pour toute longueur L_1 . Qu'est-ce que cela signifie physiquement ?

$$\begin{aligned}
 |R_1|^2 &= \frac{|r'_1 - e^{-2inkL_1}|^2}{|1 - r'_1 e^{-2inkL_1}|^2} \quad \text{On pose } \theta = -2nkL_1 \\
 &= \frac{(r'_1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}{(1 - r'_1 \cos \theta)^2 + (r'_1)^2 \sin^2 \theta} \\
 &= \frac{(r'_1)^2 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2r'_1 \cos \theta}{1 + (r'_1)^2 \cos^2 \theta + (r'_1)^2 \sin^2 \theta - 2r'_1 \cos \theta}
 \end{aligned}$$

D'où, $\forall \theta$ (i.e. pour tout L_1), car $(r'_1)^2 + 1 - 2r'_1 \cos \theta \neq 0$,

$$|R_1|^2 = \frac{(r'_1)^2 + 1 - 2r'_1 \cos \theta}{(r'_1)^2 + 1 - 2r'_1 \cos \theta} = 1$$

Physiquement, cela signifie que quelle que soit la longueur L_1 , il n'y a pas de pertes d'énergie jusqu'au détecteur.

36) On dit que la cavit Fabry-Pérot est accordée lorsque $nkL_1^0 = p_1\pi$ avec $p_1 \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour une cavité accordée

$$R_1 \approx -\frac{1 - r'_1 - 2jnk\delta L_1}{1 - r'_1 + 2jnk r'_1 \delta L_1}$$

avec $\delta L_1 \ll \lambda$. On rappelle qu'on a défini précédemment $L_1 = L_1^0 + \delta L_1$ avec δL_1 la variation de longueur due au passage de l'onde gravitationnelle.

$$e^{-2inkL_1} = e^{-2ink(L_1^0 + \delta L_1)} = \underbrace{e^{-2ip_1\pi}}_{=1} e^{-2nki\delta L_1} \approx 1 - 2ink\delta L_1, \text{ car } k\delta L_1 \ll 1. \text{ Ainsi,}$$

$$R_1 \approx -\frac{1 - r'_1 - 2ink\delta L_1}{1 - r'_1 + r'_1 \times 2ink\delta L_1}$$

- 37) Calculer $\phi'_1 = \text{Arg}[R_1]$ et montrer que la différence de phase au niveau du détecteur $\Delta\phi' = \phi'_1 - \phi'_2 + \phi_0$ vaut

$$\Delta\phi' = -\frac{1+r'_1}{1-r'_1}2nk\delta x + \phi_0$$

avec ϕ'_2 le résultat obtenu pour ϕ'_1 mais transposé à la cavité 2 de longueur L_2 (avec $r'_1 = r'_2$).

$$\begin{aligned}\phi'_1 &= \arg(R_1) = \arg\left(\frac{1-r'_1+2inkr'_1\delta L_1}{1-r'_1-2ink\delta L_1}\right) \\ &= \arg(1-r'_1+2inkr'_1\delta L_1) - \arg(1-r'_1-2ink\delta L_1)\end{aligned}$$

Les parties réelles sont positives, donc :

$$\phi'_1 = \arctan\left(\frac{2nkr'_1\delta L_1}{1-r'_1}\right) - \arctan\left(-\frac{2nk\delta L_1}{1-r'_1}\right)$$

Donc, puisque $k\delta L_1 \ll 1$, \tilde{A} l'ordre 1 :

$$\phi'_1 = \frac{2nk}{1-r'_1}\delta L_1(1+r'_1)$$

D'où, puisque $r'_1 = r'_2$ et $\delta L_1 - \delta L_2 = -\delta x$

$$\begin{aligned}\Delta\phi' &= \phi'_1 - \phi'_2 + \phi_0 \\ &= \frac{2nk}{1-r'_1}(\delta L_1(r'_1+1) - \delta L_2(r'_1+1)) + \phi_0\end{aligned}$$

$$\Delta\phi' = -\frac{r'_1+1}{1-r'_1}2nk\delta x + \phi_0$$

- 38) Pour l'interféromètre VIRGO, $r'_1 = 0.98$. Donner un ordre de grandeur de $\Delta\phi' - \phi_0$. L'interféromètre de Michelson muni de deux cavités Fabry-Pérot se comporte comme un interféromètre simple mais avec une longueur de bras bien supérieure. Évaluer la longueur effective de ces bras.

Les ondes gravitationnelles ont été détectées grâce au dispositif. Donc, puisque l'oeil perçoit les contrastes de l'ordre de 4,5%, on a :

$$\left|\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}\right| = \left|\frac{\delta I}{I_0}\right| \approx 4,5 \cdot 10^{-2}$$

Ainsi, $4,5 \cdot 10^{-2} \approx \underbrace{\sin \phi_0}_{\approx 1 \text{ pour une d'Amplitude maximale}} \times nk\delta x$, et avec $n \approx 1$ on peut obtenir

un ordre de grandeur de δx . En remplaçant dans la formule précédente, on obtient un ordre de grandeur de $\Delta\phi' - \phi_0$ en radient. Avec $L_0 \approx \frac{\delta x}{h_+(t)}$, on peut en déduire un ordre de grandeur de L_0 .