On considère que des ondes gravitationnelles émises par une source lointaine se propagent suivant l'axe Oz, ajoutant une petite perturbation h à ce tenseur métrique qui devient

$$\mathbf{g} = \mathbf{1} + \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix}$$

où toutes les composantes de $\mathbf{h}$, supposées du même ordre de grandeur, sont très petites devant 1. La longueur d'un déplacement élémentaire

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

dans ce plan s'écrit, comme précédemment, $dl = \sqrt{(d\vec{r}).(\mathbf{g}d\vec{r})}$.

4) Vérifier qu'à l'ordre 1 en $\mathbf{h}$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} + \frac{(d\vec{r}).(\mathbf{h}d\vec{r})}{2\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} + O(\mathbf{h}^2).$$

Pour dx et dy fixés, l'application $\left(\mathbf{h} \mapsto \sqrt{(1 + h_{xx})dx^2 + (h_{xy} + h_{yx})dxdy + (1 + h_{yy})dy}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ de valeur en 0 $||d\vec{r}||$ et de différentielle $\left(\mathbf{h} \mapsto \dfrac{h_{xx}dx^2 + (h_{xy} + h_{yx})dxdy + h_{yy}dy}{2||d\vec{r}||}\right)$.

Dans la suite du problème, on se placera toujours dans cette approximation.

5) On suppose $\mathbf{h}$ indépendant de x et y. Si on se déplace sur l'axe Ox, que vaut la distance L entre les points d'abscisses x et $x + L_0$, à l'ordre 1 en $\mathbf{h}$?

Et sur l'axe Oy, entre y et $y + L_0$?

$(1 + h_{xx})L_0$ **et** $(1 + h_{yy})L_0$ **respectivement.**

6) Dans le vide, dans un référentiel convenablement choisi, la perturbation h du tenseur métrique obéit à l'équation d'onde

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{h}(\vec{r}, t) = 0$$

où c est la vitesse de la lumière. Pour des solutions en ondes planes, donner la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Déterminer la longueur d'onde λ pour une onde gravitationnelle sinusoïdale de pulsation Ω.

Il s'agit de l'équation de D'Alembert tridimensionnelle : on identifie la célérité de l'onde c, d'où la relation $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$.

Puisqu'elles font varier le tenseur métrique, pour détecter des ondes gravitationnelles il "suffit" de voir la distance entre deux systèmes isolés osciller au cours du temps. Pour estimer l'amplitude et la fréquence de ces oscillations on doit relier $\mathbf{h}$ à une source, c'est-à-dire à un ensemble d'objets massifs en mouvement.

I.2 Sources d'ondes gravitationnelles

On considère une source d'ondes gravitationnelles constituée de N objets ponctuels de masses $m_1, ..., m_N$ constantes et de positions $\vec{r_1}, ..., \vec{r_N}$ dépendantes du temps. On suppose que ce système est isolé.On suppose également que la source est située près de l'origine O des coordonnées alors que l'observateur, situé au point $\vec{R} = R\vec{e_z}$ où $\vec{e_z}$ est le vecteur directeur unitaire de l'axe Oz, en est très éloigné : $\forall i \in [1, N], R \gg r_i$ où on note $r_i = ||\vec{r_i}||$. Il est alors raisonnable de s'intéresser non pas aux positions exactes des N objets mais aux propriétés globales de cette distribution de masses, que l'on caractérisera par trois *moments* définis ainsi :

$$\text{moment monopolaire } M = \sum_{n=1}^{N} m_n,$$

$$\text{moment dipolaire } \vec{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r_n} = \sum_{n=1}^{N} m_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\text{moment quadrupolaire } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{3}[3(\vec{r_n})(\vec{r_n})^T - {r_n}^2 1]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{3} \begin{pmatrix} 2x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 & 3x_n y_n & 3x_n z_n \\ 3x_n y_n & 2y_n^2 - x_n^2 - z_n^2 & 3y_n z_n \\ 3x_n z_n & 3y_n z_n & 2z_n^2 - x_n^2 - y_n^2 \end{pmatrix}$$

7) Quel est le sens physique de M et $\vec{D}/M$? A quelle grandeur physique $\ddot{\mathbf{Q}}$ est-il homogène ?

M représente la masse du système et $\vec{D}/M$ le vecteur position de son centre de masse.
$[\ddot{\mathbf{Q}}] = M.L^2.T^{-2} = [E_c]$.

8) Donner, sans approximation, le champ gravitationnel newtonien statique $\vec{g}$ créé par la source au point $\vec{R}$, en fonction de G, $\vec{R}$, des masses m_n et des positions $\vec{r_n}$. Développer cette expression à l'ordre deux par rapport aux petits paramètres r_n/R, en regroupant les termes du même ordre. On rappelle que $||\vec{R} - \vec{r}|| = R(1 - 2\vec{R}.\vec{r}/R^2 + r^2/R^2)^{1/2}$.

$$\vec{g} = G \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{||\vec{R} - \vec{r}||} \left(\vec{R} - \vec{r_n}\right)$$

Or, à l'ordre deux, $||\vec{R} - \vec{r}||^{-3} = \dfrac{1}{R^3}\left(1 + 3\dfrac{\vec{r_n}.\vec{e_z}}{R} - \dfrac{3}{2}\dfrac{r_n^2}{R^2} + \dfrac{15}{2}\left(\dfrac{\vec{r_n}.\vec{e_z}}{R}\right)^2\right)$ d'où

$$\vec{g} = G\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{R^3}\left(\left(1 + 3\frac{\vec{r_n}.\vec{e_z}}{R} - \frac{3}{2}\frac{r_n^2}{R^2} + \frac{15}{2}\left(\frac{\vec{r_n}.\vec{e_z}}{R}\right)^2\right)\vec{R} - \left(1 + 3\frac{\vec{r_n}.\vec{e_z}}{R}\right)\vec{r_n}\right)\right)$$

$$= G\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{R^3}\vec{R} + G\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{R^3}\left(3\frac{\vec{r_n}.\vec{e_z}}{R}\vec{R} - \vec{r_n}\right) + G\sum_{n=1}^{N} \frac{m_n}{R^3}\left(\left(-\frac{3}{2}\frac{r_n^2}{R^2} + \frac{15}{2}\left(\frac{\vec{r_n}.\vec{e_z}}{R}\right)^2\right)\vec{R} - 3\frac{\vec{r_n}.\vec{e_z}}{R}\vec{r_n}\right).$$

9) Vérifier qu'à cet ordre d'approximation on peut réécrire les trois composantes de g sous la forme

$$g_x = \frac{GD_x}{R^3} + \frac{3GQ_{xz}}{R^4}$$

$$g_y = \frac{GD_y}{R^3} + \frac{3GQ_{yz}}{R^4}$$

$$g_z = -\frac{GM}{R^2} - \frac{2GD_z}{R^3} - \frac{9GQ_{zz}}{2R^4}$$

On calcule ces résultats à partir de la question précédente en se rappelant que $\vec{R} = R\vec{e_z}$ et $\vec{r_n}.\vec{e_z} = z_n$.

10) Pourquoi, pour ce champ statique, peut-on souvent négliger les contributions des termes dipolaire et quadrupolaire lorsque la distance R est grande devant la taille caractéristique r de la source ?

Le moment dipolaire constitue en fait un développement limité du champ à l'ordre 1, et le moment quadripolaire à l'ordre 2.

On suppose maintenant qu'une onde gravitationnelle sinusoïdale de pulsation Ω est émise par cette source. Les équations liant le rayonnement gravitationnel aux sources sont, dans le régime que l'on considère ici, similaires à celles de l'électromagnétisme. On peut donc déduire certaines de ses propriétés par analogie.

11) On admet que le rayonnement électromagnétique d'une source (une lampe, une antenne...) dépend des trajectoires $\vec{r_n}(t)$ des charges q_n qui y circulent. On suppose cette source globalement neutre $\left(\sum_n q_n = 0\right)$ et on introduit le moment dipolaire électrique $\vec{D_q}(t) = \sum_n q_n \vec{r_n}(t)$ pour décrire cette distribution de charges de manière globale, comme nous l'avons fait précédemment pour la distribution de masses. Pourquoi, outre $D_q(t)$, la description du rayonnement doit-elle faire intervenir la vitesse de la lumière c et la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 ? Montrer que la quantité

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^3}\left(\frac{d^2 D_q}{dt^2}\right)^2$$

est homogène à une puissance. On admet qu'à un facteur numérique près elle correspond à la puissance rayonnée.

La constante ϵ_0 relie les charges au champ $\vec{E}$.
La constante c relie le champ $\vec{B}$ au champ $\vec{E}$.
D'après l'expression de la force de Coulomb, $[\frac{1}{\epsilon_0}(D_q)^2].L^{-4}$ est homogène à une force d'où $\frac{1}{\epsilon_0 c^4}\left(\frac{d^2 D_q}{dt^2}\right)^2$ aussi, donc l'expression donnée est bien homogène à une puissance (force fois vitesse).

12) Très loin de la source, le rayonnement a localement une structure d'onde plane. Vérifier que le champ électrique doit se comporter comme

$$\mathcal{E} \sim \frac{1}{\epsilon_0 c^2 R}\frac{d^2 D_q}{dt^2}$$

L'énergie électrique volumique vaut $\frac{1}{2}\epsilon_0\mathcal{E}^2$. En considérant qu'elle se répartit sur une sphère de rayon R et se propage à la vitesse c, la puissance rayonnée se comporte donc comme $\epsilon_0\mathcal{E}^2 R^2 c$, d'où le résultat annoncé.

13) Grâce à la similarité des équations fondamentales, le raisonnement ci-dessus se transpose à une onde gravitationnelle, dont l'amplitude doit dépendre des masses et des accélérations des objets qui constituent la source, donc des dérivées secondes par rapport au temps des moments M, $\vec{D}$ et $\mathbf{Q}$. Justifier pourquoi $d^2M/dt^2 = 0$ et $d^2\vec{D}/dt^2 = \vec{0}$. Nous verrons plus loin que $d^2\mathbf{Q}/dt^2 = \ddot{\mathbf{Q}}$ peut en revanche être non nulle.

Dans un système fermé, la masse se conserve.
Dans un système isolé, d'après la deuxième loi de Newton, la quantité de mouvement se conserve.

14) Compte tenu du résultat précédent et du fait que ce problème associe gravitation et relativité, pourquoi peut-on supposer que l'expression de l'amplitude du rayonnement gravitationnel $\mathbf{h}$ détecté au point $\vec{R}$ fait intervenir G, R, c, et $\ddot{\mathbf{Q}}$?

$-4\pi G$ est l'analogue gravitationnel de $\frac{1}{\epsilon_0}$, et puisque la dérivée de $\vec{D}$, il nous faudra considérer que $\ddot{\mathbf{Q}}$ joue le rôle de $\ddot{D}_q$.

15) Par analyse dimensionnelle, construire une grandeur proportionnelle à $\ddot{\mathbf{Q}}$ faisant intervenir également G, R et c et ayant la même dimension que $\mathbf{h}$.

$$\frac{G}{Rc^4}\ddot{\mathbf{Q}}$$

I.3 Rayonnement gravitationnel d'un système binaire

On suppose que la source ci-dessus est constituée de $N = 2$ objets ponctuels de masses identiques $m_1 = m_2 = m$ en interaction gravitationnelle, évoluant dans le plan Oxy sur une orbite circulaire de rayon $r_1 = r_2 = r$ autour de leur centre de masse choisi comme origine des coordonnées O (voir Fig.2). On suppose que leurs vitesses sont très inférieures à celle de la lumière, ce qui permet de traiter leur mouvement dans le cadre de la mécanique non-relativiste classique. Les positions des objets sont notées $x_1 = -x_2 = r\cos(\Omega t)$ et $y_1 = -y_2 = r\sin(\Omega t)$.

16) Déterminer le rayon de l'orbite r en fonction de la pulsation Ω, de la masse m de chaque objet et de constante(s) fondamentale(s). Exprimer la norme de la vitesse de chaque objet en fonction des mêmes grandeurs. À quelle condition l'hypothèse de mouvement non-relativiste reste-t-elle vérifiée ?

$r = \left(\frac{Gm}{4\Omega^2}\right)^{1/3}$ **et** $v = \left(\frac{Gm\Omega}{4}\right)^{1/3}$**.**

Le mouvement est non relativiste lorsque $v \ll c$, c'est-à-dire lorsque $\Omega \ll \frac{c^3}{Gm}$.

17) Exprimer l'énergie cinétique totale E_c du système et l'énergie potentielle d'interaction E_p entre les deux masses, en fonction de G, m et r, en supposant $\lim_{r\to+\infty}(E_p) = 0$. Pour un mouvement non relativiste, comment ces énergies se comparent-elles à l'énergie de masse au repos $E_m = 2mc^2$ du système ?

$E_c = mr^2\Omega^2$ **et** $E_p = -2\frac{Gm^2}{r}$**. Pour un mouvement non relativiste, ces énergies sont négligeables devant l'énergie de masse au repos.**

18) Déterminer les expressions matricielles de $\mathbf{Q}$ et $\ddot{\mathbf{Q}}$ pour ce système, en simplifiant les expressions à l'aide des formules trigonométriques données en préambule.

(On rappelle que $2\cos^2 - \sin^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(\cos^2 - \sin^2)$)

$$\mathbf{Q} = \frac{mr^2}{3}\begin{pmatrix} 1+3\cos(2\Omega t) & 3\sin(2\Omega t) & 0 \\ 3\sin(2\Omega t) & 1-3\cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{Q}} = mr^2\Omega^2\begin{pmatrix} -4\cos(2\Omega t) & -4\sin(2\Omega t) & 0 \\ -4\sin(2\Omega t) & 4\cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un calcul fait à partir des équations d'Einstein de la relativité générale exprimées dans un référentiel approprié donne dans ce cas

$$\mathbf{h} = \frac{2G}{Rc^4}\ddot{\mathbf{Q}}_\perp(t - R/c)$$