Ces oscillations de l'espace-temps ont été directement observées pour la première fois le 14 septembre 2015 par la collaboration scientifique LIGO, (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), puis par VIRGO. Au-delà d'un test positif de la théorie de la relativité générale, leur détection a marqué le début d'une nouvelle ère en astronomie, nous permettant d'observer l'Univers à l'aide de rayonnements physiquement différents des rayonnements électromagnétiques (lumière visible, ultraviolette ou infrarouge, rayons X ou gamma, radiofréquences) ou des rayons cosmiques (noyaux atomiques et particules de haute énergie).

I.1 Déformations de l'espace-temps

1) Un marcheur part du pôle Nord. Il parcourt 10000 km en ligne droite, tourne de 90° à gauche et parcourt encore 10000 km en ligne droite. Dessiner sa trajectoire et déterminer la distance minimale qu'il devrait parcourir pour revenir au pôle Nord. Qu'en aurait-il été si la surface terrestre était plane ?

   Le marcheur part nécessairement plein sud. Il arrive à l'équateur, marche 10000 km sur l'équateur et reste donc à 10000 km du Pôle Nord.

2) Une sphère de rayon $r = 1$ est décrite en coordonnées sphériques habituelles (θ, ϕ) où θ est la colatitude et ϕ est la longitude. Montrer que la longueur L d'une courbe $\mathcal{C}$ dessinée sur cette surface est donnée par

$$L = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{(d\vec{v}) \cdot (\mathbf{g} d\vec{v})}, \text{ avec } \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } d\vec{v} = \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}.$$

   $L = \int_{\mathcal{C}} dl$ **avec** $dl = \sqrt{dr^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin(\theta)d\phi)^2}$ **(or** $dr = 0$ **et** $r = 1$**), d'où le résultat.**

   On appelle la matrice g le *tenseur métrique* d'une sphère décrite en coordonnées sphériques. Associé à un système de coordonnées (ici les coordonnées sphériques (θ, ϕ)), le tenseur métrique permet de mesurer des distances, des aires ou des angles dans un espace courbe. Si on déforme cet espace, les coordonnées des objets restent les mêmes mais le tenseur métrique, donc les distances entre ces objets, varient (voir Figure 1).

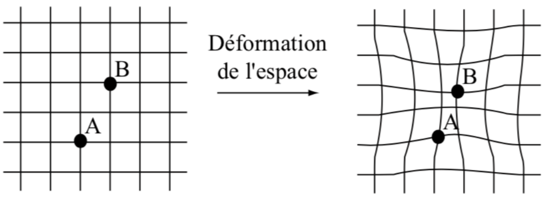

FIGURE 1 – Effet de la déformation d'un espace : les positions des objets A et B sur la grille des coordonnées restent fixes, mais la distance qui les sépare varie.

   La relativité générale prédit que l'espace-temps est déformé par des objets massifs. En mouvement, ces objets peuvent créer des *ondes gravitationnelles* qui se propagent à travers l'espace-temps en faisant osciller son tenseur métrique. On peut montrer que ces ondes n'influencent pas les mesures du temps ni celles des distances le long de leur direction de propagation. En revanche elles modifient les distances entre les objets situés dans le plan transverse à cette direction.

3) Citer un autre exemple d'ondes transverses à leur direction de propagation.

   Ondes électromagnétiques, corde vibrante, les vagues...

   Dans la suite du problème on se placera en coordonnées cartésiennes dans un repère $Oxyz$. En absence de perturbation gravitationnelle, le tenseur métrique dans le plan Oxy s'écrit simplement

$$\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$