Corrigé du sujet de révision

PIANKO Yanis

Stage de préparation, concentration

I Décompositions de Dunford et applications

I.1 Préliminaires

1) Penser à mettre les complexes sous forme polaire.

2) Attention aux carrés.

I.2 Décomposition additive de Dunford

3) 4) 5) Voir l'annexe *Décomposition de Dunford*.
Ces questions sont classiques et doivent être faites rapidement.
Attention, pour l'application, il ne faut pas confondre D diagonalisable et D diagonale... La matrice M donnée en 5) c) est diagonalisable, donc sa décomposition de Dunford est $D = M, N = 0$ et non pas $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne commutent pas.

6) 7) 8) 9) Voir l'annexe *Algorithme de décomposition de Dunford*.

10) Calcul. *Remarque :* Il faut dans l'idéal être capable de « voir » que 1 et 2 sont tous deux valeurs propres de multiplicité 1 et 2, et que les deux sous-espaces associés sont de dimension 1. (Sans calcul).

I.3 Exponentielles et logarithmes de matrices

11) (a) Voir question sur la différentiabilité. Cela montrera en particulier la continuité.
 (b) Le montrer pour les matrices diagonalisables, puis utiliser la densité des matrices complexes dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
 On peut aussi le montrer pour les matrices triangulaires.
 (c) (d) (e) Voir annexe *Rappels et Compléments sur l'exponentielle de matrices.*

12) (a) Voir annexe *Rappels et Compléments sur l'exponentielle matricielle*. Pour (b), montrer que l'indice de nilpotence de N est égale à 1 si e^A est diagonalisable. La (c) est une application.

13) 14) 15) Questions sans difficulté.

16) Une exponentielle est inversible (question 11). Utiliser la décomposition de Dunford Schwarz et la question 13 pour la réciproque.

17) Utiliser $e^{tA+(1-t)B}$.

18) Lemme de décomposition des noyaux, base adaptée. 19) pas de soucis.

20) C'est une matrice compagnon. Utiliser la question 4) c).

I.4 Matrices TP$\mathbb{R}$ et décomposition de Dunford-Schwarz

21) 22) 23) 24) 25) Sans difficulté.

26) a) Pas de difficulté. b) Si $M = R^2, R \in GL_p(\mathbb{R})$, penser à $R^2 = R \times R = \exp(P(R)) \times \exp\left(\overline{P}(R)\right) = \exp\left(P(R) + \overline{P}(R)\right)$. c) On s'aide de la question 12) b : si $A = \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice réelle dont les valeurs propres sont $2i\pi$ et $-2i\pi$), $e^A = e^0 = I_n$.

II Décompositions découlant de la racine carrée

II.1 Racines carrées et $S_p^+(\mathbb{R})$

1) 2) 3) Voir l'annexe *Ensemble Racine carrée.*

4) 5) 6) 7) 8) Classique.

9) Pas de difficulté : utiliser l'image réciproque par une fonction continue, et la fonction 8) .

II.2 Décomposition polaire

10) Sans difficulté.

11) Réciproque évidente.

12) 13) 14) Voir *Annexe : Décomposition Polaire*

II.3 Décomposition de Cholesky

15) On suppose qu'il existe des matrices L, D, V triangulaire inférieure à diagonale unité, diagonale à coefficients stictement positifs et triangulaire supérieure à diagonale unité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = LDV$. Comme A est symétrique, alors $A = {}^tA = {}^tVD{}^tL$, et par unicité de cette décomposition, on déduit que ${}^tV = L$. En posant $T = \sqrt{D}V$, on obtient une décomposition de Cholesky de A.

16) Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une autre matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tSS$. Alors $ST^1 = {}^t(TS^1)$. Le terme de gauche est une matrice triangulaire supérieure, tandis que le terme de droite est une matrice triangulaire inférieure. Ainsi, ST^{-1} est une matrice diagonale. De plus, $(ST^{-1})^{-1} = TS^1 = {}^t(TS^{-1}) = ST^{-1}$, et tous les coefficients diagonaux de ST^{-1} sont strictement positifs, donc sont égaux à 1, c'est-à-dire $S = T$.

17) On a $a_{1,1} = t_{1,1}^2$, donc $t_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$, ce qui requiert un calcul de racine carrée (on va considérer le calcul de la racine carrée comme une opération arithmétique élémentaire). Ensuite, pour $j \in \{2, \ldots, n\}$, on a $a_{1,j} = t_{1,1}t_{1,j}$, donc $t_{1,j} = \dfrac{t_{1,1}}{a_{1,j}}$, ce qui requiert une division.

18) Soit $i \in \{2, \ldots, n\}$. On procède par récurrence, en supposant que l'on a calculé tous les coefficients $t_{i_0,j}$ pour $i_0 < i$. On a $a_{i,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} t_{k,i}^2$, donc $t_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i}^2}$, ce qui requiert $i-1$ multiplications, $i-1$ additions et le calcul d'une racine carrée. Ensuite, pour $j \in \{i+1, \ldots, n\}$, on a $a_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{i} t_{k,i}t_{k,j}$, donc $t_{i,j} = \dfrac{1}{t_{i,i}}\left(a_{i,j} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} t_{k,i}t_{k,j}\right)$, ce qui requiert $i-1$ multiplications, $i-1$ additions et une division. On a l'expression de tous les coefficients de la forme $t_{i,j}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui conclut la récurrence.

19) Le coût total du calcul de la décomposition de Cholesky, en nombre d'opérations arithmétiques élémentaires, est :

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)(2i-1) = \frac{1}{6}n\left(2n^2 + 3n + 1\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3}n^3$$

III Factorisation LU et applications

III.1 Factorisation LU

1) 2) Procédons par récurrence sur $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$, c'est clair.
Supposons le résultat acquis pour $n-1 \geqslant 1$ et soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, ayant tous les déterminants principaux non nuls.
On écrit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & a_{nn} \end{pmatrix}$ avec $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{K}), B_1 \in M_{n-1,1}(\mathbb{K}), C_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $a_{nn} \in \mathbb{K}$. Comme tous les déterminants principaux de A sont non nuls, on a $A_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ avec tous ses déterminants principaux non nuls et $a_{nn} \in \mathbb{K}^*$.
Par hypothèse de récurrence, il existe L_1 triangulaire inférieure à diagonale unité et U_1 triangulaire supérieure dans $GL_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $A_1 = L_1U_1$. Notons :
$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ D_1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} U_1 & E_1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
où $D_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{K}), E_1 \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$ sont à déterminer.
La matrice L est triangulaire inférieure à diagonale unité et la matrice U est triangulaire supérieure dans $GL_n(\mathbb{K})$.
L'égalité $A = LU$ équivaut à :
$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & a_nn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1U_1 & L_1E_1 \\ D_1U_1 & \alpha + D_1E_1 \end{pmatrix}$$
Soit à $L_1E_1 = B_1, \quad D_1U_1 = C_1, \quad \alpha + D_1E_1 = a_{nn}$. Comme L_1 est inversible, le système linéaire $L_1E_1 = B_1$ admet une unique solution $E_1 \in M_{n-1,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n-1}$ et comme U_1 est inversible, le système linéaire $D_1U_1 = C_1$, équivalent à ${}^tU_1 \left({}^tD_1\right) = {}^tC_1$, a une unique solution $D_1 \in M_{1,n-1}(\mathbb{K})$, puis $\alpha = a_{nn} - D_1E_1$. On a donc ainsi une décomposition LU unique.

Réciproquement, si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition LU, alors U est aussi inversible et la décomposition par bloc faite précédemment nous montre que tous les déterminants principaux de A sont non nuls. En effet, $\det A \neq 0$ et $A_1 = L_1U_1$ est inversible puisque $\det A_1 = \det U_1 = \dfrac{\det U}{\alpha} \neq 0$ et tous les déterminants principaux de A_1 sont non nuls par hypothèses de récurrence.

4) 5) 6) Calcul matriciel simple.

7) vérifier à quelle condition M est triangulaire supérieure.

8) 9) 10) 11) Sans difficulté.

12) Cours.

13)

III.2 Quelques inégalités qui en découlent

14) En utilisant Cholesky : on suppose que A est inversible, sinon le résultat est clair. $A = {}^tPP$, avec P triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. $\det A = (\det P)^2 = \prod_{i=1}^{p} p_{ii}^2$. Or, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}, a_{ii} = \sum_{k=1}^{p} p_{ki}^2 \geqslant p_{ii}^2$.

En utilisant QR : Soit B l'unique matrice symétrique définie positive telle que $A = B^2 = {}^tBB$. Soient $C_1, \ldots, C_p$ les colonnes de B. Il suffit de montrer $|\det B| \leqslant \prod_{i=1}^{p} \|C_i\|$. On a supposé A et B inversibles, donc $B = QR$: $|\det B| = |\det R| = \prod_{i=1}^{p} t_{ii}$ (coefficients diagonaux de R). Soient $Q_1, \ldots, Q_p$ les colonnes de Q, orthonormées. $t_{ii} = \langle C_i, Q_i \rangle \leqslant \|C_i\|$ par Cauchy-Schwarz. Or :
$$\det A = (\det B)^2 \leqslant \|C_1\|^2 \ldots \|C_p\|^2 = a_{11} \ldots a_{nn}$$

15) Les valeurs propres de f sont réelles positives et f est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}_0 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$, chaque ε_i étant vecteur propre relatif à la valeur propre λ_i. Le produit des λ_i est le déterminant de f.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale quelconque de E et $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ la matrice de f dans cette base. On a $\prod_{i=1}^{p} \langle f(e_i), e_i \rangle = \prod_{i=1}^{p} a_{ii}$ puisque $\mathcal{B}$ est orthonormale et d'après ce qui précède,

$$\prod_{i=1}^{p} \lambda_i = \det f = \det A \leqslant \prod_{i=1}^{p} \langle f(e_i), e_i \rangle$$

On en déduit $\prod_{i=1}^{p} \leqslant \inf_{(e_1,\dots,e_p) \in \mathcal{A}} \prod_{i=1}^{p} \langle f(e_i), e_i \rangle$ et en considérant la base $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{A}$, on conclut qu'il y a égalité.

16) On note k et l les tailles respectives des matrices A_1 et A_2, qui sont symétriques réelles. Ainsi, il existe $K \in \mathcal{O}_k(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{O}_l(\mathbb{R})$, ainsi que deux matrices D_1 et D_2 diagonales telles que :

$$A_1 = {}^tKD_1K, \; A_2 = {}^tLD_2L$$

On pose $S = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$, qui est orthogonale. On note $A' = {}^tSAS$. On calcule et on obtient :

$$A' = \begin{pmatrix} D_1 & B' \\ {}^tB' & D_2 \end{pmatrix}$$

où $B' = {}^tKBL$. On a $\det A = \det A'$, et $\det A_1 \det A_2 = \det D_1 \det D_2 = \prod_{i=1}^{p} a_{ii}$, ce qui est vrai par Hadamard.

17) (a) sans difficulté.

(b) $\det A = (\det P)^2, \det B = \det D(\det P)^2, \det(A+B) = \det(I_p + D)(P)^2$. On est donc ramené à démontrer que $\det(I_p + D) \geqslant 1 + \det D$, c'est à dire

$$\prod_{i=1}^{p} (A + \lambda_i) \geqslant 1 + \prod_{i=1}^{p}$$

ce qui est évident car $\lambda_i \geqslant 0 \forall i$.

(c) $A_1 = {}^tUU, A_2 = {}^tVV + {}^tWW$. $\det A = (\det P)^2 = (\det U)^2 (\det W)^2 = \det A_1 \det A_2$.
Puisque $detA_1 = (\det U)^2$, il suffit de montrer que :

$$\det\left({}^tWW\right) \leqslant \det\left({}^tWW + {}^tVV\right)$$

ce qui est immédiat avec ce qui précède.

18) $\exists D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ diagonale à termes strictement positifs, et P orthogonale telles que $A = {}^tPDP$. On en déduit que si $S \in \mathcal{S}, \operatorname{tr}(AS) = \operatorname{tr}(D^tPSP) = \operatorname{tr}(DS') = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i s_{ii}$ où $S' = {}^tPSP = (s_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ symétrique définie positive.

19) $\ln\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(AS)\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} \ln(\lambda_i s_{ii}) \geqslant \frac{1}{n}\ln\left(\det A \prod_{i=1}^{p} s_{ii}\right)$ puis par Hadamard, avec $\alpha \leqslant \det S'$:

$$\ln\left(\frac{1}{n}\operatorname{tr}(AS)\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln(\alpha \det A)$$

Trouver S telle qu'il y a égalité : Telle que $s_{ii} = \dfrac{\lambda}{\lambda_i}$ avec $\lambda > 0$. On prend $lambda = (\alpha \det A)^{\frac{1}{n}}$.

20) On prend $\alpha = 1$.

$$(\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\operatorname{tr}((A+B)S)$$

Puis, on passe à la borne inférieure.

⋆ ⋆ ⋆