Sujet de révision

Ondes gravitationelles

Concentration

Table des matières

I Ondes gravitationnelles **2**

I.1 Déformations de l'espace-temps 3

I.2 Sources d'ondes gravitationnelles 4

I.3 Rayonnement gravitationnel d'un système binaire 6

I.4 GW150914 7

II Détecteur interférométrique **9**

II.1 Dispositif de Michelson 9

II.2 Cavité Fabry-Pérot 11

Ce sujet de révision est l'occasion de revoir l'optique ondulatoire, et notamment la superposition de N ondes, mais aussi de s'intéresser aux ondes gravitationnelles, domaine actuel de recherche qui est déjà tombé aux concours PC et PSI, et qui est susceptible de tomber à nouveau, (pourquoi pas en MP ?).

Constantes et formules utiles

Vitesse de la lumière	c	$= 3,00 \times 10^{8}$	$\mathrm{m.s^{-1}}$
Constante universelle de la gravitation	G	$= 6,67 \times 10^{-11}$	$\mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$
Megaparsec	Mpc	$= 1,99 \times 10^{30}$	kg
Masse du Soleil	$\mathrm{M}_\odot$	$= 3,09 \times 10^{22}$	m
Accélération de la pesanteur terrestre	g	$= 9,81$	$\mathrm{m.s^{-2}}$
Constante de Planck	$h = 2\pi\hbar$	$= 6,63 \times 10^{-34}$	$\mathrm{m^2.kg.s^{-1}}$
Constante de Boltzmann	k_B	$= 1,38 \times 10^{-23}$	$\mathrm{m^2.kg.s^{-2}.K^{-1}}$
Périmètre terrestre	L_t	$= 40\ 000$	km

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

$$2\cos(x)\sin(x) = \sin(2x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + O(x^3)$$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}.\vec{v}$.

I Ondes gravitationnelles

Définition Ondes gravitationnelles

Les ondes gravitationnelles sont des ondes se propageant dans le tissu élastique de l'espace-temps dont les déformations et la courbure sont gouvernées par les équations de la relativité générale.

Elles se propagent à la vitesse de la lumière en transportant de l'énergie. On peut les comparer à des déformations dans une sorte de gelée ou à la propagation des ondes à la surface de l'eau lorsqu'on y jette un caillou.

Mise en contexte

Ces ondes ont été prédites et décrites théoriquement par Albert Einstein de 1916 à 1918 par analogie avec l'émission et la propagation des ondes lumineuses dans un champ électromagnétique lorsque l'on agite une charge.

Un phénomène similaire devait se produire dans le champ de gravitation constitué par la courbure de l'espace-temps lorsque certaines configurations de masses sont animées de certains mouvements. Tout comme les ondes électromagnétiques, les ondes gravitationnelles transportent de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique.

On a commencé à penser sérieusement à partir des années 1960 qu'il devait être possible de développer une astronomie gravitationnelle très prometteuse car les ondes gravitationnelles sont très pénétrantes et elles peuvent nous renseigner sur des phénomènes astrophysiques extrêmes que l'on trouve associés à des astres compacts comme les étoiles à neutrons et les trous noirs mais aussi le Big Bang.

Ces oscillations de l'espace-temps ont été directement observées pour la première fois le 14 septembre 2015 par la collaboration scientifique LIGO, (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), puis par VIRGO. Au-delà d'un test positif de la théorie de la relativité générale, leur détection a marqué le début d'une nouvelle ère en astronomie, nous permettant d'observer l'Univers à l'aide de rayonnements physiquement différents des rayonnements électromagnétiques (lumière visible, ultraviolette ou infrarouge, rayons X ou gamma, radiofréquences) ou des rayons cosmiques (noyaux atomiques et particules de haute énergie).

I.1 Déformations de l'espace-temps

1) Un marcheur part du pôle Nord. Il parcourt 10000 km en ligne droite, tourne de 90° à gauche et parcourt encore 10000 km en ligne droite. Dessiner sa trajectoire et déterminer la distance minimale qu'il devrait parcourir pour revenir au pôle Nord. Qu'en aurait-il été si la surface terrestre était plane ?

2) Une sphère de rayon $r = 1$ est décrite en coordonnées sphériques habituelles (θ, ϕ) où θ est la colatitude et ϕ est la longitude. Montrer que la longueur L d'une courbe $\mathcal{C}$ dessinée sur cette surface est donnée par

$$L = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{(d\vec{v}) \cdot (\mathbf{g} d\vec{v})}, \text{ avec } \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } d\vec{v} = \begin{pmatrix} d\theta \\ d\phi \end{pmatrix}.$$

On appelle la matrice g le *tenseur métrique* d'une sphère décrite en coordonnées sphériques. Associé à un système de coordonnées (ici les coordonnées sphériques (θ, ϕ)), le tenseur métrique permet de mesurer des distances, des aires ou des angles dans un espace courbe. Si on déforme cet espace, les coordonnées des objets restent les mêmes mais le tenseur métrique, donc les distances entre ces objets, varient (voir Figure 1).

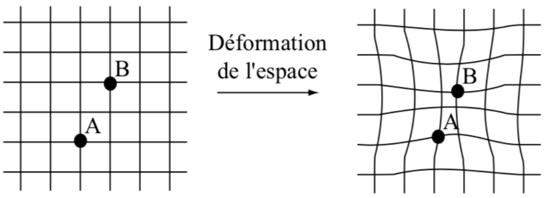

FIGURE 1 – Effet de la déformation d'un espace : les positions des objets A et B sur la grille des coordonnées restent fixes, mais la distance qui les sépare varie.

La relativité générale prédit que l'espace-temps est déformé par des objets massifs. En mouvement, ces objets peuvent créer des *ondes gravitationnelles* qui se propagent à travers l'espace-temps en faisant osciller son tenseur métrique. On peut montrer que ces ondes n'influencent pas les mesures du temps ni celles des distances le long de leur direction de propagation. En revanche elles modifient les distances entre les objets situés dans le plan transverse à cette direction.

3) Citer un autre exemple d'ondes transverses à leur direction de propagation. Dans la suite du problème on se placera en coordonnées cartésiennes dans un repère $Oxyz$. En absence de perturbation gravitationnelle, le tenseur métrique dans le plan Oxy s'écrit simplement

$$\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère que des ondes gravitationnelles émises par une source lointaine se propagent suivant l'axe Oz, ajoutant une petite perturbation h à ce tenseur métrique qui devient

$$\mathbf{g} = \mathbf{1} + \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix}$$