

où toutes les composantes de \mathbf{h} , supposées du même ordre de grandeur, sont très petites devant 1. La longueur d'un déplacement élémentaire

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

dans ce plan s'écrit, comme précédemment, $dl = \sqrt{(d\vec{r}) \cdot (\mathbf{g}d\vec{r})}$.

4) Vérifier qu'à l'ordre 1 en \mathbf{h}

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} + \frac{(d\vec{r}) \cdot (\mathbf{h}d\vec{r})}{2\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} + O(\mathbf{h}^2).$$

Dans la suite du problème, on se placera toujours dans cette approximation.

5) On suppose \mathbf{h} indépendant de x et y . Si on se déplace sur l'axe Ox , que vaut la distance L entre les points d'abscisses x et $x + L_0$, à l'ordre 1 en \mathbf{h} ?

Et sur l'axe Oy , entre y et $y + L_0$?

6) Dans le vide, dans un référentiel convenablement choisi, la perturbation \mathbf{h} du tenseur métrique obéit à l'équation d'onde

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{h}(\vec{r}, t) = 0$$

où c est la vitesse de la lumière. Pour des solutions en ondes planes, donner la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Déterminer la longueur d'onde λ pour une onde gravitationnelle sinusoïdale de pulsation Ω .

Puisqu'elles font varier le tenseur métrique, pour détecter des ondes gravitationnelles il "suffit" de voir la distance entre deux systèmes isolés osciller au cours du temps. Pour estimer l'amplitude et la fréquence de ces oscillations on doit relier \mathbf{h} à une source, c'est-à-dire à un ensemble d'objets massifs en mouvement.

I.2 Sources d'ondes gravitationnelles

On considère une source d'ondes gravitationnelles constituée de N objets ponctuels de masses m_1, \dots, m_N constantes et de positions $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ dépendantes du temps. On suppose que ce système est isolé. On suppose également que la source est située près de l'origine O des coordonnées alors que l'observateur, situé au point $\vec{R} = R\vec{e}_z$ où \vec{e}_z est le vecteur directeur unitaire de l'axe Oz , en est très éloigné : $\forall i \in [1, N], R \gg r_i$ où on note $r_i = \|\vec{r}_i\|$. Il est alors raisonnable de s'intéresser non pas aux positions exactes des N objets mais aux propriétés globales de cette distribution de masses, que l'on caractérisera par trois *moments* définis ainsi :

$$\text{moment monopolaire } M = \sum_{n=1}^N m_n,$$

$$\text{moment dipolaire } \vec{D} = \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^N m_n \vec{r}_n = \sum_{n=1}^N m_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{moment quadrupolaire } \mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{3} [3(\vec{r}_n)(\vec{r}_n)^T - r_n^2 \mathbf{1}] \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{m_n}{3} \begin{pmatrix} 2x_n^2 - y_n^2 - z_n^2 & 3x_n y_n & 3x_n z_n \\ 3x_n y_n & 2y_n^2 - x_n^2 - z_n^2 & 3y_n z_n \\ 3x_n z_n & 3y_n z_n & 2z_n^2 - x_n^2 - y_n^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 7) Quel est le sens physique de M et \vec{D}/M ? A quelle grandeur physique $\ddot{\mathbf{Q}}$ est-il homogène?
- 8) Donner, sans approximation, le champ gravitationnel newtonien statique \vec{g} créé par la source au point \vec{R} , en fonction de G , \vec{R} , des masses m_n et des positions $r_n^{\vec{r}}$. Développer cette expression à l'ordre deux par rapport aux petits paramètres r_n/R , en regroupant les termes du même ordre. On rappelle que $|\vec{R} - \vec{r}| = R(1 - 2\vec{R} \cdot \vec{r}/R^2 + r^2/R^2)^{1/2}$.
- 9) Vérifier qu'à cet ordre d'approximation on peut réécrire les trois composantes de g sous la forme

$$g_x = \frac{GD_x}{R^3} + \frac{3GQ_{xz}}{R^4}$$

$$g_y = \frac{GD_y}{R^3} + \frac{3GQ_{yz}}{R^4}$$

$$g_z = -\frac{GM}{R^2} - \frac{2GD_z}{R^3} - \frac{9GQ_{zz}}{2R^4}$$

- 10) Pourquoi, pour ce champ statique, peut-on souvent négliger les contributions des termes dipolaire et quadrupolaire lorsque la distance R est grande devant la taille caractéristique r de la source?

On suppose maintenant qu'une onde gravitationnelle sinusoïdale de pulsation Ω est émise par cette source. Les équations liant le rayonnement gravitationnel aux sources sont, dans le régime que l'on considère ici, similaires à celles de l'électromagnétisme. On peut donc déduire certaines de ses propriétés par analogie.

- 11) On admet que le rayonnement électromagnétique d'une source (une lampe, une antenne...) dépend des trajectoires $r_n^{\vec{r}}(t)$ des charges q_n qui y circulent. On suppose cette source globalement neutre ($\sum_n q_n = 0$) et on introduit le moment dipolaire électrique $\vec{D}_q(t) = \sum_n q_n r_n^{\vec{r}}(t)$ pour décrire cette distribution de charges de manière globale, comme nous l'avons fait précédemment pour la distribution de masses. Pourquoi, outre $D_q(t)$, la description du rayonnement doit-elle faire intervenir la vitesse de la lumière c et la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 ? Montrer que la quantité

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^3} \left(\frac{d^2 D_q}{dt^2} \right)^2$$

est homogène à une puissance. On admet qu'à un facteur numérique près elle correspond à la puissance rayonnée.

- 12) Très loin de la source, le rayonnement a localement une structure d'onde plane. Vérifier que le champ électrique doit se comporter comme

$$\mathcal{E} \sim \frac{1}{\epsilon_0 c^2 R} \frac{d^2 D_q}{dt^2}$$

- 13) Grâce à la similarité des équations fondamentales, le raisonnement ci-dessus se transpose à une onde gravitationnelle, dont l'amplitude doit dépendre des masses et des accélérations des objets qui constituent la source, donc des dérivées secondes par rapport au temps des moments M , \vec{D} et \mathbf{Q} . Justifier pourquoi $d^2 M/dt^2 = 0$ et $d^2 \vec{D}/dt^2 = \vec{0}$. Nous verrons plus loin que $d^2 \mathbf{Q}/dt^2 = \ddot{\mathbf{Q}}$ peut en revanche être non nulle.

- 14) Compte tenu du résultat précédent et du fait que ce problème associe gravitation et relativité, pourquoi peut-on supposer que l'expression de l'amplitude du rayonnement gravitationnel \mathbf{h} détecté au point \vec{R} fait intervenir G , R , c , et $\ddot{\mathbf{Q}}$?
- 15) Par analyse dimensionnelle, construire une grandeur proportionnelle à $\ddot{\mathbf{Q}}$ faisant intervenir également G , R et c et ayant la même dimension que \mathbf{h} .

I.3 Rayonnement gravitationnel d'un système binaire

On suppose que la source ci-dessus est constituée de $N = 2$ objets ponctuels de masses identiques $m_1 = m_2 = m$ en interaction gravitationnelle, évoluant dans le plan Oxy sur une orbite circulaire de rayon $r_1 = r_2 = r$ autour de leur centre de masse choisi comme origine des coordonnées O (voir Fig.2). On suppose que leurs vitesses sont très inférieures à celle de la lumière, ce qui permet de traiter leur mouvement dans le cadre de la mécanique non-relativiste classique. Les positions des objets sont notées $x_1 = -x_2 = r \cos(\Omega t)$ et $y_1 = -y_2 = r \sin(\Omega t)$.

- 16) Déterminer le rayon de l'orbite r en fonction de la pulsation Ω , de la masse m de chaque objet et de constante(s) fondamentale(s). Exprimer la norme de la vitesse de chaque objet en fonction des mêmes grandeurs. À quelle condition l'hypothèse de mouvement non-relativiste reste-t-elle vérifiée?
- 17) Exprimer l'énergie cinétique totale E_c du système et l'énergie potentielle d'interaction E_p entre les deux masses, en fonction de G , m et r , en supposant $\lim_{r \rightarrow +\infty} (E_p) = 0$. Pour un mouvement non relativiste, comment ces énergies se comparent-elles à l'énergie de masse au repos $E_m = 2mc^2$ du système?
- 18) Déterminer les expressions matricielles de \mathbf{Q} et $\ddot{\mathbf{Q}}$ pour ce système, en simplifiant les expressions à l'aide des formules trigonométriques données en préambule. Un calcul fait à partir des équations d'Einstein de la relativité générale exprimées dans un référentiel approprié donne dans ce cas

$$\mathbf{h} = \frac{2G}{Rc^4} \ddot{\mathbf{Q}}_{\perp}(t - R/c)$$

où

$$\mathbf{Q}_{\perp} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix}$$

est la partie de \mathbf{Q} correspondant au seul plan Oxy . Cette relation peut se réécrire

$$\begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix} = \frac{2G}{Rc^4} \begin{pmatrix} \ddot{Q}_{xx}(t - R/c) & \ddot{Q}_{xy}(t - R/c) \\ \ddot{Q}_{yx}(t - R/c) & \ddot{Q}_{yy}(t - R/c) \end{pmatrix}$$