Autour des séries génératrices

19 février 2019

Première partie
Séries génératrices

1 Variables aléatoires usuelles

1.1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Rappeler la définition de sa fonction génératrice, notée G_X. Justifier que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\mathbb{P}(X)$ en fonction de G_X et de ses dérivées successives.
Si X est d'espérance finie, exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de G_X et de ses dérivées successives. Même question pour $V(X)$.

1.2

Donner les fonctions génératrices de variables alétoires suivant les lois :
- binomiale de paramètres n, p ($X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$) ;
- géométrique de paramètre q ($X \rightsquigarrow \mathcal{G}(q)$) ;
- de Poisson de paramètre λ ($X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$).
En déduire l'espérance et la variance dans chaque cas.

Cours

2 Propriétés

2.1 Somme de variables aléatoires indépendantes

Soit $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes. Posons $X = \sum_{1 \le i \le n} X_i$. Exprimer G_X en fonction des G_{X_i}.

Récurrence.

Le produit de Cauchy marche par indépendance et car $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k \cap X_2 = n-k)$

2.2 Somme de N variables aléatoires de même loi

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de même loi, mutuellement indépendantes entre elles et avec N. On définit la variable aléatoire S comme suit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ S(\omega) = \sum_{i=0}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

Trouver la fonction génératrice de S. En déduire l'espérance de S, lorsqu'elle existe.

$$\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = k)\mathbb{P}(\sum_{i=0}^{k} X_i = n)$$

$$\forall t \in [0,1[\ ,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S = n)t^n = \sum_{k,n} \mathbb{P}(N = k)\mathbb{P}\left(\sum_{i=0}^{k} X_i = n\right)t^n$$

$$= \sum_{n} \mathbb{P}(N = n)G_X(t)^n$$

Exemple On lance un dé à six faces bien équilibré. On lance une pièce de monnaie bien équilibrée : Si l'on obtient pile, on s'arrête. Si l'on obtient face, on relance le dé et on ajoute le résultat obtenu au lancer de dé précédent. On relance ensuite la pièce, et ainsi de suite. Quel est le résultat qu'on obtiendra, en moyenne, pour la somme des lancers de dés ?

$\mathbb{E}(N) = 2$ **et** $\mathbb{E}(X) = 3,5$ **d'où** $\mathbb{E}(S) = 7$

Deuxième partie

Application au dénombrement

Les séries génératrices sont également utilisées en dénombrement. Le principe est le suivant : on a une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui possède une certaine propriété, et dont on veut trouver l'expression. On considère alors la fonction génératrice associée $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n$ ou $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n x^n}{n!}$ selon les cas. De la propriété de la suite, on déduit une propriété de la fonction ; cela nous permet de calculer la fonction, puis la suite.

3 Nombres de Catalan

3.1

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons C_n le nombre d'expressions bien parenthésées comprenant n parenthèses ouvrantes et n parenthèses fermantes. Ainsi, pour $n = 1$, la seule expression possible est "()" donc $C_1 = 1$. Pour $n = 2$, on a "()()" et "(())" d'où $C_2 = 2$. Calculer C_3.

$C_3 = 5$ **: "((()))", "(()())", "(())()", "()(())", "()()()".**

3.2

Par convention, $C_0 = 1$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

On partitionne selon l'indice$2k+1$ **de la parenthèse qui ferme la première.**

La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la suite des nombres de Catalan. On se propose de trouver une expression explicite de C_n.

3.3

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$. Soit R le rayon de convergence de cette série entière. Montrer que $R \geq \frac{1}{4}$.
En considérant $\frac{f(x)-1}{x}$, montrer que $f(x) \in \{\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}, \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\}$. Conclure par continuité sur l'expression de $f(x)$. En utilisant le développement en série entière en 0 de $\sqrt{1-u}$, donner l'expression de C_n pour $n \in \mathbb{N}$.

$C_n \leq 2^{2n}$ **d'où** $R \geq \frac{1}{4}$**.**

$$f(x)^2 = \sum_n \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} x^n = \sum_n C_{n+1} x^n = \frac{f(x)-1}{x}$$

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Intermède : formule de Stirling

3.4 Première étape

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $n! \sim C n^n e^{-n}\sqrt{n}$.
Indication : Poser $U_n = \ln \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ et montrer que $U_{n+1} - U_n$ est le terme général d'une série convergente.

$$U_{n+1} - U_n = \ln(n+1) - \ln(n+1) - n\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(e^{-1}) - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n})$$

$$= -1 + \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}) + 1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$$

d'où $U_n \to l \in \mathbb{R}$ **d'où** $\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} \to e^l \in \mathbb{R}_+^*$**.**

3.5 Deuxième étape

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)^n dt$. Ces intégrales sont appelées intégrales de Wallis.
Trouver, par intégration par parties, une relation entre W_{n+2} et W_n.
Montrer que $W_{n+2} \leq W_{n+1} \ \leq W_n$. En déduire que $\frac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$.
Calculer W_0 et W_1. En déduire une expression de W_{2n} et W_{2n+1}, puis un équivalent de $\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}}$ grâce à la première étape. Conclure.

$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$ **d'où** $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \frac{\pi}{2}$ **et** $W_{2n+1} = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!}$ **donc**

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \sim \frac{c^2}{2\pi}$$

3.6

On a ainsi prouvé la formule de Stirling. En déduire un équivalent de C_n.

4 Dérangements

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On dit que σ est un dérangement lorsqu'elle ne possède aucun point fixe.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note d_n le nombre de dérangements de $\mathcal{S}_n$. On se propose de calculer d_n par une méthode similaire.

4.1

Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$

On partitionne selon le nombre de points fixes, et $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$**.**

4.2

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!}$. Soit R le rayon de convergence de cette série entière. Montrer que $R \geq 1$.
Montrer que $f(x) = \frac{1}{1-x} - (e^x - 1)f(x)$, puis que $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

$$f(x)=\sum_n \frac{d_n}{n!}x^n = 1+\sum_n \left(1-\sum_{k=0}^{n}\frac{d_k}{k!(n+1-k)!}\right)x^{n+1} = \frac{1}{1-x} - f(x)(e^x-1)$$

donc $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$**.**

4.3

En déduire une expression puis un équivalent de d_n.

$$d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \quad \sim \frac{n!}{e}$$

5 Partitions

Soit P_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On convient que $P_0=1$.

5.1

Calculer P_1, P_2 et P_3.

$P_1=1$**,** $P_2=2$ **et** $P_3=5$**.**

5.2

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ P_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}P_k$.

On partitionne selon l'ensemble auquel appartient $n+1$**.**

5.3

On pose f la série entière : $\sum_{n\in\mathbb{N}} P_n\frac{x^n}{n!}$ de rayon de convergence R. Montrer que $R\geq 1$ puis trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f.

$P_n\leq n!$ **par récurrence d'où** $R\geq n!$**.**

$$f'(x)=\sum_n\sum_{k=0}^{n}\frac{P_k}{k!(n-k)!}x^n = f(x)e^x$$

5.4

En déduire f, puis, par développement en série entière de cette fonction en 0, trouver une expression de P_n.

Or, $f(0) = 1$ **d'où** $f(x) = e^{e^x - 1}$**.**

$$f(x) = \sum_n \left(\sum_{k>0} \frac{x^k}{k!} \right)^n$$

6 Nombres de Bernoulli

6.1 Introduction

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m$.
Calculer $S_1(n)$. Montrer que $S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ et que $S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$.

Récurrence.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

En remarquant des régularités lorsqu'on augmente m, on peut conjecturer puis montrer qu'il existe une suite de rationnels $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$, appelée "nombres de Bernoulli", telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, S_m(n) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$$

6.2 Formule de récurrence

Calculer B_0. En considérant $S_m(1)$, montrer une formule de récurrence sur les nombres de Bernoulli.

$B_0 = 1$ **et** $B_m = 1 - \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} B_k$**.**

6.3 Fonction génératrice

Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$ de rayon de convergence R. Montrer que $R > 0$.

Par réccurence, $B_n \leq n!$ **par exemple.**

En fait plus finement en étudiant le signe de B_n**,** $|B_n| \leq 1$ **d'où** $R = +\infty$**.**

On sait de plus que $(x \mapsto \frac{x}{e^x - 1})$ est développable en série entière en 0. En multipliant cette fonction par $e^x - 1$, montrer que $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$.

$$f(x)\left(e^x-1\right)=\sum_n\left(\sum_{k=0}^n\frac{B_k}{k!(n+1-k)!}\right)x^{n+1}=x+\sum_{n\geq 2}\frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}B_k-1\right)=x.$$

Conclure sur $f(x)$. On pourrait montrer à partir de ce résultat que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ B_n=\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^k(-1)^j\binom{k}{j}j^n.$$

Troisième partie

Un peu de calcul différentiel

7 Théorème de Schwarz

On considère des fonctions de $\mathbb{R}^n$ (dont on note $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ la base canonique) dans $\mathbb{C}$, sur lesquelles on veut montrer que l'ordre dans lequel on dérive n'a pas d'importance (ce qui a des applications en physique). Contrairement à ce qu'on pourrait penser, cela n'est pas toujours vrai.

7.1 Contre-exemple

On pose :

$$f:(x,y)\mapsto y^2\sin(x/y)\text{ si }y\neq 0\text{ et }0\text{ sinon.}$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2\cos(x/y)+\frac{1}{y}\sin(x/y)$ **ou** 0 **si** $y=0$**, et**
$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\cos(x/y)+\frac{1}{y}\sin(x/y)$ **ou** 0 **si** $y=0$**.**

7.2 Démonstration

Supposons maintenant f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U. Soit $a\in U$.
Pour h_j et h_k tels que $a+h_je_j+h_k\in U$, on note :

$$\phi(h_j,h_k)=\frac{1}{h_jh_k}(f(a+h_je_j+h_ke_k)-f(a+h_je_j)-f(a+h_ke_k)+f(a))$$

Montrer que pour (h_j,h_k) au voisinage de $(0,0)$:

$$\phi(h_j,h_k)=\int_0^1\int_0^1\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(a+th_je_j+sh_ke_k)dsdt.$$

Montrer que, $\forall \varepsilon > 0$, pour (h_j, h_k) au voisinage de $(0,0)$:

$$|\phi(h_j, h_k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)| \leq \varepsilon.$$

En déduire que $\phi \underset{(0,0)}{\rightarrow} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)$. De même, montrer que $\phi \underset{(0,0)}{\rightarrow} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$, puis conclure.

$f(u + be_i) - f(u + ae_i) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i} f(u + te_i) dt$.

Utiliser la continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ en a.

Conclusion par unicité de la limite.

8 Fonctions holomorphes

8.1 Conditions de Cauchy-Riemann

Soit f définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z \in U$ lorsque,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \text{ converge dans } \mathbb{C} \text{ lorsque } h \to 0.$$

Ou encore lorsque :

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} | f(z+h) \underset{h \to 0}{=} f(z) + \lambda h + o(h)$$

Cette limite λ est le nombre dérivé de f en z noté $f'(z)$. En posant $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\Re(f(x+iy)), \Im(f(x+iy)))$, montrer que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z si et seulement si g est différentiable en $(\Re(z), \Im(z))$ et, en notant $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = (a,b)$, alors $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = (-b, a)$.

$\lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{f(z+ih) - f(z)}{h} \right) = i \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} \right) = i \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right)$.

Représentation matricielle des complexes Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $Z = (a, b, -b, a)$. Calculer ${}^tZ$, $\det Z$ et $\exp Z$. Soit de même $Z' =$, calculer $Z + Z'$ et ZZ'.
Expliquer le lien avec les conditions de Cauchy-Riemann.

Représente la multiplication par un complexe.

8.2 Unicité du prolongement analytique

Connexes Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite connexe lorsque tout ouvert fermé relativement à A est soit vide, soit égal à A. Montrer que les connexes par arcs sont connexes (on pourra montrer la continuité de la fonction indicatrice d'un ouvert fermé sur A).

L'image continue d'un connexe par arcs sera incluse dans $\{0,1\}$ donc réduite au singleton $\{0\}$ ou $\{1\}$.

Vous verrez dans le cours sur les fonctions holomorphes (c'est-à-dire $\mathbb{C}$-dérivable partout et de dérivée continue) qu'une fonction holomorphe définie sur un ouvert est analytique, c'est-à-dire développable en série entière au voisinage de tout point de l'ouvert.
Soit U un ouvert connexe et V un ouvert tel que $V \subset U$. Montrer que si deux fonctions holomorphes coïncident sur V, alors elles coïncident sur U.
On pourra prouver que si une fonction holomorphe est nulle sur V, elle est nulle sur U en montrant que $\{z \in U | f(z) = 0\}$ est un ouvert fermé relativement à U.

L'ensemble à considérer est $\{x \in U | \forall \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 0\}$, fermé par continuité des dérivées successives, ouvert par analycité, non vide par hypothèse (on prend un point intérieur de V).

9 Théorème spectral

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme symétrique de E. On considère la fonction :

$$f : x \neq 0 \in E \mapsto \frac{< u(x), x >}{||x||^2}.$$

Montrer que f est bornée et atteint son maximum en un vecteur unitaire e.
En calculant le gradient de f en e de deux façons différentes, en déduire une preuve du théorème spectral.

$f(\lambda x) = f(x)$ d'où $f(E \backslash \{0\}) = f(S)$ avec S la sphère unité de E. f étant continue sur ce compact, elle y est bornée et atteint ses bornes.
$\nabla f(e) = 0$ car extremum, mais aussi
$\nabla f(e) = u(e) - 2 < u(e), e >$ en faisant le calcul (il vaut mieux repasser par les différentielles).
u admet donc une valeur propre, d'où le résultat par récurrence en considérant $(\mathrm{Vect}(e))^{\perp}$.

Quatrième partie

Fonction zeta de Riemann

10 Définition

Rappeler la définition de la fonction zeta sur le demi-plan complexe ouvert $]1, +\infty[+i\mathbb{R}$ et montrer son caractère $\mathcal{C}^1$.

Cours (séries de fonctions).

11 Extension à $\mathbb{C}\backslash\{1\}$

11.1 Transformation d'Abel

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On note $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_N B_N - \sum_{n=0}^{N-1} B_n(a_{n+1} - a_n).$$

Se montre aisément par récurrence, ou directement en indiçant intelligemment.

Ce procédé est appelé "transformation d'Abel". Il constitue l'analogue discret de l'intégration par parties.

11.2 Expression

Soit $s \in]1, +\infty[+i\mathbb{R}$. Par transformation d'Abel, montrer que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{N^{s-1}} - s\int_1^N \frac{[u]}{u^{s+1}}du.$$

En déduire (en notant $\{u\}$ la partie fractionnaire de u) que :

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}.$$

$a_n = \frac{1}{n^s}$**,** $b_n = 1$ **et** $a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} \frac{s}{u^{s+1}}du$**.**

11.3 Conclusion

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ coïncidant avec zeta sur le demi-plan complexe ouvert $]1, +\infty[+i\mathbb{R}$. On peut montrer que :

$$\forall s \notin \{0, 1\},\ \zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin(\frac{\pi s}{2})\Gamma(s-1)\zeta(s-1).$$

On peut par ailleurs montrer que :

$$\zeta(z) \underset{z\to 0}{\to} -\frac{1}{2}$$

Conclure sur la détermination du prolongement analytique de la fonction zeta.

D'après les résultats précédents, il y a unicité du prolongement analytique sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ de la fonction ζ.

12 Valeurs particulières

On définit les polynômes de Bernoulli de la façon suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ B_0(t) = 1 \text{ et } \forall k > 0,\ B'_k(t) = kB_{k-1}(t) \text{ et } \int_0^1 B_k(t)dt = 0.$$

On peut alors montrer qu'on a le développement en série entière en 0 suivant :

$$\frac{xe^{xt}}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(t)x^k}{k!}$$

Ainsi en particulier la suite $(B_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est celle des nombres de Bernoulli.

12.1

Calculer $B_1(t)$ et $B_2(t)$.
Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ B_{2k}(1) = B_{2k}(0) = B_{2k}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B_{2k+1}(1) = B_{2k+1}(0) = 0$$

$B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ **et** $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$**.**

12.2

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \text{ on note } I(k, m) = \int_0^1 B_{2k}(t)\cos(m\pi t)dt.$$

Montrer que $I(0, m) = 0$. Par double intégration par parties, montrer que :

$$I(1, m) = \frac{2}{m^2\pi^2} \text{ si } m \text{ est pair et 0 sinon.}$$

$$\forall k \geq 2,\ I(k, m) = -\frac{2k(2k-1)}{m^2\pi^2} I(k-1, m)$$

puis que

$$I(k, m) = \frac{(2k)!}{m^{2k}\pi^{2k}} \text{ si } m \text{ est pair et 0 sinon.}$$

Par changement de variable $u = 1 - t$**,** $I(0, m) = -I(0, m)$**.**
On intègre les sinusoïdes et on dérive les polynômes.
Conclusion par récurrence.

12.3

On considère maintenant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ B_k^*(t) = B_k(t) - B_k(0) \text{ et } I^*(k,m) = \int_0^1 B_{2k}^*(t)\cos(m\pi t)dt\ .$$

Montrer que $I^*(k,m) = I(k,m)$ puis que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}}\zeta(2k) = \sum_{m=1}^{+\infty} I^*(k,m).$$

$I^*(k,m) = I(k,m) + C \times I(0,m) = I(k,m)$**.**

12.4

Montrer que

$$\cos(mx) = \frac{\sin(\frac{2m+1}{2}x) - \sin(\frac{2m-1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

puis que

$$\frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k}\pi^{2k}}\zeta(2k) = (\lim_{N\to\infty}\int_0^1 B_{2k}^*(t)\frac{\sin(\frac{2N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}dt) - \frac{1}{2}\int_0^1 B_{2k}^*(t)dt.$$

$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$ **pour la formule.**

$$\forall N \in \mathbb{N}\textbf{,}\ \sum_{m=1}^{N} I^*(n,m) = \int_0^1 \left(\sum_{m=1}^{N} B_{2k}^*(t)\frac{\sin(\frac{2m+1}{2}\pi t) - \sin(\frac{2m-1}{2}\pi t)}{\sin(\frac{1}{2}\pi t)}\right)dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin(\frac{2m+1}{2}\pi t)}{\sin(\frac{1}{2}\pi t)}dt - \frac{1}{2}\int_0^1 B_{2k}^*(t)dt \textbf{ par téléscopie.}$$

Montrer que le premier terme vaut 0 et le second $\frac{1}{2}B_{2k}$.

En déduire les valeurs de ζ pour les entiers pairs ou négatifs non nuls.

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}\pi^{2k}B_{2k}}{(2k)!}$$

$$\zeta(-k) = \frac{(-1)^k B_{k+1}}{k+1}$$