Sujet de Révision: Décompositions de matrices

PIANKO Yanis

Concentration

Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^*$, et E un espace euclidien de dimension p. On note $\mathcal{M}_{n,\ell}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et ℓ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
On munit $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique, et on note $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Définition 1 *Une matrice carrée A est dite* toute puissante *sur $\mathbb{K}$ (en abrégé TP$\mathbb{K}$), si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B à coefficients dans $\mathbb{K}$ telle que $A = B^n$. On remarque qu'une matrice toute puissante sur $\mathbb{K}$ est nécessairement à coefficients dans $\mathbb{K}$. Cette notion peut se généraliser sur d'autres corps commutatifs que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.*

Définition 2 *Une matrice A est dite* positive *si $\forall x \in \mathbb{R}^p$, ${}^t xAx \geqslant 0$, et* définie positive *si elle est positive et ${}^t xAx = 0 \iff x = 0$.*

Définition 3 *On appelle* sous-matrices principales *d'une matrice $A = ((a_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ les matrices*

$$A_k = ((a_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant k}\,, (k = 1, \dots, p)$$

Les déterminants principaux sont les $\Delta_k = \det(A_k)$

Le but de ce sujet est de passer en revue les différentes décompositions et factorisations de matrices en algèbre linéaire, pour en présenter l'intérêt à travers quelques applications, mais surtout une vision algorithmique.

I Décompositions de Dunford et applications

I.1 Préliminaires

On s'intéresse aux matrices de dimension 1×1.

1) Montrer que toute matrice $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est toute puissante.

2) Trouver l'ensemble des matrices TP$\mathbb{R}$.

I.2 Décomposition additive de Dunford

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$. $\chi_A = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.

3) Montrer que A est semblable à la matrice diagonale par blocs :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \dots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$$

où $i \in \{1, \dots, k\}\,, p_i = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_p)^{\alpha_i}$ et $N_i \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ nilpotente.

4) (a) On suppose pour cette question A TP$\mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = B^n$. Montrer que A et B sont codiagonalisables par blocs, c'est-à-dire que les endomorphismes u et v canoniquement associés à A et B sont diagonaux par bloc dans une même base.

   (b) En déduire l'implication

$$A \text{ TP}\mathbb{K} \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, k\}, \lambda_i I_{p_i} + N_i \text{ TP}\mathbb{K}$$

   (c) Montrer la réciproque.

5) (a) Déduire de la question 3) que, pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que χ_A est scindé, $\exists (D, N)$ un couple de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ tel que D est diagonalisable et N est nilpotente, D commute avec N, et qui vérifie $A = D + N$.

   (b) Montrer que A et N sont des polynômes en A, puis que le couple (D, N) est unique.

   (c) Donner la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Cette décomposition s'appelle décomposition (additive) de Dunford. On se propose de construire un **algorithme**, permettant de décomposer toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $M = D + N$, avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et $D \times N = N \times D$.

— On se fixe jusqu'à la fin de cette sous-partie une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note π_A son polynôme minimal.
— On écrit $\pi_A = P_1^{\alpha_1} \ldots P_k^{\alpha_k}$ sa décomposition de π_A en facteurs irréductibles.
— On note $P = P_1 \ldots P_k$ le produit des irréductibles distincts divisant π_A.

6) Justifier qu'il existe deux polynômes R et S de $\mathbb{C}[X]$ tels que $RP + SP' = 1$.

7) Montrer qu'il existe Q dans $\mathbb{C}[X, Y]$ vérifiant $P(X + Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2Q(X, Y)$.

On définit par récurrence la suite de matrices $(A_k)_{k \geqslant 0}$ par $A_0 = A$ et pour tout entier k,

$$A_{k+1} = A_k - P(A_k)S(A_k).$$

8) Montrer que pour tout entier k, $P(A_k) \in P(A)^{2^k}\mathbb{C}[A]$, et trouver un entier ℓ tel que $P(A_\ell) = 0$.

9) Montrer que le couple (D, N) défini par $D = A_\ell$ et $N = (A - A_\ell)$ satisfait la décomposition proposée.

10) Appliquer l'algorithme pour décomposer la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

I.3 Exponentielle et logarithmes de matrices

Définition 4 *Une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite* unipotente *si $A - I_p$ est nilpotente.*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note respectivement $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ et $\mathcal{U}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes et unipotentes. Pour ce qui suit, $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

11) (a) Montrer que la fonction $A \to \exp(A)$ est continue.

   (b) Montrer que $\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr} A}$.

(c) *Question difficile :*
Montrer que la fonction exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec, pour toutes matrices X, H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{d}\,(\exp)\,(X)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\substack{0 \leqslant i,j \leqslant k-1 \\ i+j=k-1}} X^i H X^j \right)$$

(d) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la matrice e^A est inversible d'inverse e^{-A}.

(e) L'application $A \mapsto \exp(A)$ est-elle injective ? Montrer que deux matrices A et B commutent si et seulement si $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$.

12) (a) Donner la décomposition additive de Dunford de $\exp A$.

(b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\exp A$ est diagonalisable.

(c) Montrer que $\exp A = I_p$ si et seulement si A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

13) On restreint la fonction exp à $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$. On appelle f cette restriction. $\exp N$ est donc une somme de support fini. On définit alors le logarithme matriciel sur $\mathcal{U}_p(\mathbb{K})$:

$$\text{pour } U \in \mathcal{U}_p(\mathbb{K}), \log U = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(U - I_p)^n}{n} \text{ (somme de support fini).}$$

Montrer que f est une bijection de $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{U}_p(\mathbb{K})$, de bijection $f^{-1} = \log$.

14) En déduire que les matrices unipotentes sont TP$\mathbb{K}$.

15) Montrer que la seule matrice nilpotente et TP$\mathbb{K}$ est la matrice nulle.

16) Montrer que exp est une surjection de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sur $GL_p(\mathbb{K})$. En déduire que toute matrice inversible est TP$\mathbb{K}$.

17) Montrer que $GL_p(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

18) Montrer que $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, non inversible est TP$\mathbb{K}$ $\iff$ A est semblable à la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(0, M)$, où M est inversible.

19) Démontrer que A est TP$\mathbb{C}$ $\iff$ $\alpha_0 = \dim \mathrm{Ker}\, A$, où α_0 multiplicité de 0 en tant que racine de χ_A.

20) Utiliser ce qui précède pour montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -125 \\ 0 & 1 & 0 & -75 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{pmatrix}$ est TP$\mathbb{C}$ mais n'est pas TP$\mathbb{R}$.

I.4 Matrices TP$\mathbb{R}$ et décomposition de Dunford-Schwarz

21) Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. La décomposition additive de Dunford donne $M = D+N = D\left(I_p + D^{-1}N\right)$. Montrer qu'il existe $P_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $D = \exp\left(P_1(M)\right)$.

22) Montrer que D^{-1} est un polynôme en D. En déduire que $I_p + D^{-1}N$ est unipotent.

23) En déduire que $I_p + D^{-1}N$ est un polynôme, qu'on appelle P_2, en M.

24) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, à exprimer en fonction de P_1 et P_2, tel que $M = \exp\left(P(M)\right)$.
Remarque : voir annexe pour voir une jolie démonstration topologique utilisant la différentiabilité de l'exponentielle.

25) En déduire la décomposition de Dunford-Schwarz :
Soit $A \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique soit scindé sur $\mathbb{K}$. Il existe un unique couple formé d'une matrice inversible diagonalisable D et d'une matrice unipotente U telles que $A = DU = UD$, et U et D sont des polynômes en A.

26) Application :
   (a) Montrer que $A \in GL_p(\mathbb{C})$ est diagonalisable si, et seulement si, il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que A^r soit diagonalisable. Est-ce toujours vrai si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$?
   (b) Montrer que $\exp(\mathcal{M}_p(\mathbb{R})) = \{R^2 \mid R \in GL_p(\mathbb{R})\}$.
   (c) L'application exp restreinte à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est-elle injective quel que soit p ?

II Décompositions découlant de la racine carrée

II.1 Racines carrées et $S_p^+(\mathbb{R})$

Soit A une matrice de $M_p(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice R de $M_p(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $A = R^2$. On note Rac A l'ensemble des racines carrées de A .Nous avons vu qu'une matrice inversible est TP$\mathbb{R}$ si et seulement si elle admet une racine carrée. On peut légitimement se demander s'il y a plusieurs racines carrées... Nous essayons de déterminer Rac$A$ dans divers cas. On verra qu'il peut y en avoir aucune, un nombre fini ou une infinité. On pourra dénombrer Rac A s'il est fini, sinon remarquer qu'il est constitué de classes de similitude.

1) Déterminer Rac A dans le cas où A admet p valeurs propres réelles distinctes.

2) Déterminer Rac I_p, Rac O, et Rac $(-I_p)$.

3) Expliquer comment on peut déterminer Rac A dans le cas où A est diagonalisable.

On note $\mathcal{S}^+(E)$ [resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$] l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs [resp. définis positifs] de E, et $S_p^+(\mathbb{R})$ [resp. $S_p^{++}(\mathbb{R})$] l'ensemble des matrices symétriques positives [resp. définis positives] réelles.

4) Soit $A \in S_p(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in S_p^+$ [resp. $\in S_p^{++}(\mathbb{R})$] si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives [resp. strictement positives].

5) En déduire l'équivalence suivante : S est symétrique définie positive $\iff \exists P \in GL_p(\mathbb{R}) \mid S = {}^tPP$.

6) Montrer que pour $A \in S_p^+(\mathbb{R})$, Rac $A \bigcap S_p^+(\mathbb{R})$ est un singleton $\{R\}$. Montrer que R est un polynôme en A.

7) Soit $A = ((a_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in S_p(\mathbb{R})$. Montrer que si $\det(A) > 0$ et $A_{p-1} = ((a_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant p-1} \in S_{p-1}^{++}(\mathbb{R})$, alors $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$.

8) En déduire qu'une matrice symétrique est définie positive si, et seulement si, tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

9) En déduire que l'ensemble $S_p^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

II.2 Décomposition polaire

Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = |z|\, e^{i\varphi}$. Un analogue d'une telle décomposition est la décomposition polaire d'une matrice, $A = SU$, où S est une matrice « *symétrique* »positive et U une matrice « *orthogonale* ».

10) Montrer que les matrices de Gram sont exactement les matrices symétriques positives.

11) Soient $(u_1, \ldots, u_p)$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ deux familles de vecteurs de p vecteurs de E. Montrer que $G\,(u_1, \ldots, u_p) = G\,(v_1, \ldots, v_p)$ (matrices de Gram) si, et seulement si, il existe $f \in \mathcal{O}(E)$ tel que $v_k = f(u_k) \quad \forall k \in \{1, \ldots, p\}$.

12) On va ici montrer deux méthodes permettant d'accéder à la décomposition polaire :
    (a) Soit u un endomorphisme quelconque de E. En utilisant les racines carrées et la question précédente, montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal v et un endomorphisme symétrique positif h tel que $u = vh$. Montrer que si u est inversible, h est unique. Montrer que v est unique si et seulement si u est inversible.
    (b) Soit $A \in GL_p(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (O, S) tel que $A = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive.
    On ne suppose plus A inversible. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis que $O_p(\mathbb{R})$ est compact. En déduire que A s'écrit $A = OS$ avec O orthogonale et S symétrique positive.

13) Montrer que l'application $\varphi \left| \begin{array}{l} \mathcal{O}_p(\mathbb{R}) \times S_p^{++}(\mathbb{R}) \to GL_p(\mathbb{R}) \\ (\Omega, S) \mapsto \Omega S \end{array} \right.$ est un isomorphisme continu, d'application inverse continue (on parle d'homéomorphisme).

II.3 Décomposition de Cholesky

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Le but est de démontrer la décomposition de Cholesky, i.e. *il existe une unique matrice* $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que* $A = {}^tTT$, et d'obtenir un **algorithme** de décomposition.

15) En admettant qu'il existe un unique triplet L triangulaire inférieure à diagonale unité, D diagonale à coefficients positifs et V triangulaire supérieure à diagonale unité telle que $A = LDV$ (on le démontrera dans la partie suivante), démontrer l'existence de la décomposition de Cholesky.

16) Montrer l'unicité.

Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ ($t_{i,j} = 0$ si $i > j$). Pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$,

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} t_{k,i} t_{k,j}$$

17) Donner l'expression de $t_{1,j}$ en fonction des coefficients de A.

18) Soit $(i, j) \in [\![2; n]\!] \times [\![1; n]\!]$. Déterminer l'expression de $t_{i,j}$ en fonction des $t_{i',j}$ et des coefficients de A, où $i' < i$.

19) Donner un équivalent de la complexité de cet algorithme, en considérant le calcul d'une racine carrée réelle et la division comme une opération élémentaire.

III Factorisation LU et applications

III.1 Factorisation LU

On veut démontrer le théorème suivant : *Une matrice $A \in GL_p(\mathbb{K})$ admet une décomposition $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une matrice triangulaire supérieure si, et seulement si, tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Lorsqu'elle existe, une telle décomposition est unique.*

1) Soit $A \in GL_p(\mathbb{K})$ dont les déterminants principaux de A sont tous non nuls. Montrer par récurrence l'existence d'une décomposition LU. *Remarque :* on obtient en fait un **algorithme** d'obtention de la décomposition LU.

2) Montrer la réciproque.

3) Montrer l'unicité d'une telle décomposition.

On a procédé ici par récurrence sur la dimension de la matrice. Une autre méthode consiste à adapter le pivot de Gauss, ce qui fournit un **algorithme** plus simple pour obtenir la décomposition LU. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

4) Donner la matrice qui, multipliée à gauche de A, va intervertir les lignes i et j. Quel est son déterminant ?

5) Donner la matrice qui, multipliée à gauche de A, va ajouter à la i-ième ligne la j-ième ligne multipliée par $\lambda \in \mathbb{R}$. Quel est son déterminant ? Son inverse ?

6) On suppose dorénavant A inversible. Montrer qu'on peut trouver $M \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $MA = U$ où U est triangulaire supérieure.

7) Préciser à quelles conditions on peut écrire $A = LU$, où U [resp. L] est triangulaire supérieure [resp. inférieure].

Cette décomposition est utilisée dans la résolution numérique d'un système linéaire. Elle ramène en effet la résolution de $AX = Y$ à la résolution successive de deux systèmes triangulaires : $LZ = Y$ et $UX = Z$. Résoudre algorithmiquement un système triangulaire est assez aisé.

8) En déduire, lorsque $A \in GL_p(\mathbb{K}) \bigcap S_p(\mathbb{K})$ admet une telle décomposition, la décomposition $A = LD^tL$, où D diagonale. Cette décomposition s'appelle la décomposition de Cholesky alternative. *On a prouvé le résultat admis pour la question 16 de la partie précédente.*

9) $A \in GL_p(\mathbb{R})$. En considérant la matrice ${}^tAA$, déduire de la décomposition de Choleski la factorisation suivante : $A = QR$, où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

10) Montrer l'unicité de cette décomposition.

11) En déduire la décomposition d'Iwasawa : Toute matrice $A \in GL_p(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QDR$ où Q est une matrice orthogonale, D une matrice diagonale de coefficients diagonaux strictement positifs et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

On peut aussi obtenir la décomposition QR par une autre méthode, qui fournit un **algorithme** de calcul effectif de Q et de R. On utilise pour cela le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

12) En utilisant la méthode suggérée ci-dessus, retrouver la décomposition QR d'une matrice $A \in GL_p(\mathbb{K})$ et son unicité.

13) Pour $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$, déduire de cette factorisation la décomposition de Cholesky.

III.2 Quelques inégalités qui en découlent

14) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ une matrice symétrique positive. En utilisant la décomposition de Cholesky, puis la factorisation QR, démontrer de deux manières différentes l'inégalité d'Hadamard :

$$\det A \leqslant \prod_{i=1}^{p} a_{ii}.$$

15) Soit f un endomorphisme symétrique de E, défini positif. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de f et $\mathcal{A}$ l'ensemble des bases orthonormales de E. Montrer que :

$$\prod_{i=1}^{p} \lambda_i = \inf_{(e_1,\ldots,e_p)\in\mathcal{A}} \prod_{i=1}^{p} \langle f(e_i), e_i \rangle.$$

16) Utiliser la question 14) pour démontrer l'inégalité de Fischer : soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{pmatrix}$ une matrice réelle symétrique positive écrite en blocs, les blocs A_1 et A_2 étant carrés. Montrer que :

$$\det A \leqslant \det A_1 \det A_2$$

17) Soient A, B symétriques positives, A étant définie positive.
   (a) Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$, où D est diagonale. C'est le théorème de pseudo-réduction simultannée.
   (b) En déduire que $\det(A + B) \geqslant \det A + \det B$.
   (c) On reprend les notations de la question 11). En utilisant ce qui précède et la décomposition de Choleski (on pourra poser $P = \begin{pmatrix} U & V \\ 0 & W \end{pmatrix}$ avec des blocs de même taille que ceux de A), retrouver l'inégalité de Fischer.

18) Soit α un réel strictement positif. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de déterminant supérieur où égal à α. Soit $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que si $S \in \mathcal{S}$, il existe $S' = (s_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ symétrique définie positive telle que :

$$\mathrm{tr}\,(AS) = \mathrm{tr}\,(DS') = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i sii$$

19) En utilisant une inégalité de convexité et l'inégalité d'Hadamard, montrer que

$$\mathrm{tr}\,(AS) \geqslant p\,(\alpha \det A)^{\frac{1}{p}} \text{ pour tout } S \in \mathcal{S}$$

En déduire que $\inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{tr}\,(AS) = p\,(\alpha \det A)^{\frac{1}{p}}$.

20) En déduire l'inégalité de Minkowski : si A, B sont symétriques définies positives, alors :

$$(\det A)^{\frac{1}{p}} + (\det B)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\det(A + B))^{\frac{1}{p}}$$

⋆ ⋆ ⋆