DL Espaces préhilbertien et algèbre linéaire

PIANKO Yanis

Prépa Moulay Idriss, Fès

I Algèbre linéaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace euclidien, de dimension $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que les formes linéaires sur E sont exactement les applications $\varphi_a : x \longrightarrow \langle a, x\rangle$, $a \in E$.

2) Montrer que, $\forall x, y \in E^2, \langle u(x), y\rangle = \langle x, {}^t u(y)\rangle$.
Remarque : on peut ainsi définir la symétrie pour les applications linéaires d'un espace euclidien par $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle \forall x, y \in E$.

3) En déduire, si n est impaire, que E admet un hyperplan $H \subset E$ u-stable.

4) On ne suppose plus n impaire. Soit q une projection de E. Établir les équivalences suivantes :
— q est orthogonale.
— $\forall x, y \in E, \langle q(x), y\rangle = \langle x, q(y)\rangle$.
— q est symétrique.
— $\forall x \in E, \|q(x)\| \leqslant \|x\|$.

II Algèbre bilinéaire

Soient E un espace vectoriel réel de dimension $n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\varphi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire. On appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice A définie par

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, A_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$$

5) Montrer que, pour tous vecteurs x et y de coordonnées X et Y dans $\mathcal{B}$, $\varphi(x, y) = {}^t XAY$.

6) Vérifier que φ est symétrique si et seulement si A est symétrique.

7) On suppose que $A = \mathrm{Diag}(1, \ldots, n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire sur E.

8) On suppose dans cette question que $n = 2$. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement s'il existe des constantes réelles A, B, C, avec $B^2 - AC < 0$ et $A > 0$ telles que, pour tout $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x, y) = Ax_1y_1 + B(x_1y_2 + y_1x_2) + Cx_2y_2$$

9) Montrer que $\varphi : (x, y) \to (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$ avec $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

10) (a) Application : soit φ la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. La forme bilinéaire φ est-elle un produit scalaire ?

(b) Même question si φ est canoniquement associée à $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

III Matrices de Gram

Soit E un espace euclidien. À une famille $(x_1, \ldots, x_m)$ de vecteurs de E, on associe la matrice

$$G(x_1, \ldots, x_m) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$$

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On suppose $p \geqslant 2$.

11) Montrer que $\operatorname{rg}(G(x_1, \ldots, x_p)) = \operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p)$.

12) On note $g(x_1, \ldots, x_p) = \det(G(x_1, \ldots, x_p))$. On suppose désormais que la famille $x_1, \ldots, x_p$ est libre, et on note $F = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$. Montrer que $g(x_1, \ldots, x_p) > 0$.

13) Soit π la projection orthogonale sur F. Montrer que $g(x, x_1, \ldots, x_p) = g(x - \pi(x), x_1, \ldots, x_p)$.

14) Montrer que :

$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \frac{g(x, x_1, \ldots, x_p)}{g(x_1, \ldots, x_p)}$$

15) Interpréter géométriquement cette égalité.