Espaces vectoriels euclidiens et préhilbertiens réels

PIANKO Yanis

I Exercices d'application

*** Exercice 1 : X 2000**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que E possède au moins un hyperplan stable par u.

*** Exercice 2 : X 2011**

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(AP) \leqslant \operatorname{tr} A$.

Exercice 3 : Centrale 1998 et 2013

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\inf\limits_{M \in S_n(\mathbb{R})} \sum\limits_{i,j} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$.

Exercice 4 : X 2013, Mines 2016

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\operatorname{tr}\left(A^tA + B^tB\right) = \operatorname{tr}\left(AB + {}^tA^tB\right)$. Montrer que $A = {}^tB$.

*** Exercice 5 : Mines 2014**

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^tM = {}^tMM$ et $M^2 = -I_n$. Montrer que M est orthogonale.

*** Exercice 6 : X 2009**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$. On pose $D = A + {}^tA$. Montrer :

$$\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} A \cap \overset{t}{\operatorname{Ker}} A \text{ et } \operatorname{Im} D = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} {}^tA$$

*** Exercice 7 : X 2009, Mines 2016**

Soient $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$ et $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ C & D \end{array}\right)$. À quelle condition la matrice M est-elle orthogonale ? Montrer qu'alors :

$$|\det A| = |\det D|$$

*** Exercice 8 : Centrale 2014**

Soient $E = \mathcal{C}^1([-1,1], \mathbb{R})$, $F = \left\{u \in E, u_{|[-1,0]} = 0\right\}$, $G = \left\{u \in E, u_{|[0,1]=0}\right\}$. Si $(u,v) \in E^2$, on pose $\langle u, v\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} uv$.

1) Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2) Montrer que $F^\perp = G$.
3) Les sous-espaces F et G sont ils supplémentaires ?

Exercice 9 : Mines 2015

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que le spectre complexe de A est inclus dans $i\mathbb{R}$.

*** Exercice 10 : Mines 2010 et 2013**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Montrer :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$$

II Exercices à astuce

*** Exercice 11 : Mines 2011 et 2013**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de A est égal au nombre de valeurs propres non nulles de ${}^tAA$ (comptées avec la multiplicité).

*** Exercice 12 : Mines 2011**

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$(*)\ \forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

1) Montrer : $(*) \iff \forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$.
2) Montrer que $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$.
3) Montrer que le rang de u est pair.

*** Exercice 13 : Ens 2012**

Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $D : (u_n) \in E \to (u_{n+1} - u_n)_{n \geqslant 0}$.
1) Montrer que D est un endomorphisme. Est-il surjectif ? injectif ?
2) Déterminer les valeurs propres de D.
3) Soit F l'ensemble des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable. Montrer que F est stable par D.
   On munit F du produit scalaire donné par : $\forall (u_n)_{n\geqslant 0}, (v_n)_{n \geqslant 0} \in F, \langle (u_n), (v_n) \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.
4) Déterminer $H = \left\{ \dfrac{\langle u, D(u) \rangle}{\langle u, u \rangle}, u \in F \backslash \{0\} \right\}$.

*** Exercice 14 : Centrale 2001, X 2009, Mines 2014 et 2015**

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = n$ et $\left| \sum_{i,j} a_{i,j} \right| \leqslant n$.

*** Exercice 15 : X 2013**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(R)$ antisymétrique. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \det \left(I_n + \alpha A^2 \right) \geqslant 0$.

*** Exercice 16 : Mines 2012**

Soient A et $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer :

$$2 \operatorname{tr} AB \leqslant \operatorname{tr} A^2 + \operatorname{tr} B^2$$

*** Exercice 17 : X 2016**

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ inversible et semblable à son inverse. Montrer que $\operatorname{tr} A^2 \geqslant n$.

*** Exercice 18 : X 2010**

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer $\sup \left\{ \int_{-1}^{1} x P(x) \mathrm{d}x \mid P \in E, \int_{-1}^{1} P^2(x) \mathrm{d}x = 1 \text{ et } \int_{-1}^{1} P(x) \mathrm{d}x = 0 \right\}$.

*** Exercice 19 : X 2009, Mines 2013 et 2016, Centrale 2014**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1) Montrer que $A - I_n$ et $A + I_n$ sont inversibles, et que $(A - I_n)(A + I_n)^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
2) Montrer que $A \to (A - I_n)(A + I_n)^{-1}$ est une bijection de l'ensemble de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques dans l'ensemble $\{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}); 1 \notin \mathrm{Sp}(M)\}$.

*** Exercice 20 : X 2012 et 2014**

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = 0$.

III Exercices plus difficiles

**** Exercice 21 : <u>X 2007</u>**

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soient $(v_1, \ldots, v_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$ tel que : $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, p\}^2, i \neq j \Rightarrow \langle v_i, v_j \rangle < 0$.

1) Soient $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i v_i$ et $y = \sum_{i=1}^{p} |x_i| v_i$. Comparer $\|x\|$ et $\|y\|$.
2) Si $x = 0$, montrer que les x_i sont tous nuls ou tous non nuls.
3) Montrer que $p-1$ vecteurs de $(v_1, \ldots, v_p)$ forment une famille libre. En déduire que $p \leqslant n+1$.
4) Trouver dans $\mathbb{R}^2$ trois vecteurs unitaires (v_1, v_2, v_3) satisfaisant aux conditions de l'énoncé.
5) Construire une famille de $n+1$ vecteurs $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

**** Exercice 22 : X 2007, Mines 2016**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice symétrique définie positive.

1) Si $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, montrer que $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.
2) En déduire que $\det A \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr} A}{n}\right)^n$.
3) Montrer que les coefficients diagonaux de A sont > 0.
4) En déduire que $\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,j}$.

**** Exercice 23 : Mines 2014**

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$, $x_1 \ldots, x_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F} = \{A \in S_n(\mathbb{R}), \forall k \in \{1, \ldots, p\}, Ax_k = 0\}$. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

**** Exercice 24 : X 2004**

Soit $A \in S_{n+p}^{++}(\mathbb{R})$ définie par blocs $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{array}\right)$, avec $A_1 \in S_n(\mathbb{R}), A_2 \in S_p(R), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A \leqslant \det A_1 \det A_2$.

**** Exercice 25 : Mines 2011 et 2012, Centrale 2011**

Soietn $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B = A^2 + A + I_n$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(B)$?

**** Exercice 26 : <u>Centale 2013</u>**

Déterminants de Gram :
Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel. Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ n vecteurs de E. On note $Gram(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient (i,j) est $\langle u_i, u_j \rangle$ et on définit $G(u_1, \ldots, u_n)$ le déterminant de celle-ci.

1) Montrer que si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée alors $G(u_1, \ldots, u_n) = 0$.
2) Montrer que si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre alors $G(u_1, \ldots, u_n) > 0$.
3) Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension p et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Pour tout $x \in E$, montrer que $d(x,F) = \sqrt{\dfrac{G(e_1, \ldots, e_p, x)}{G(e_1, \ldots, e_p)}}$.

**** Exercice 27 : X 2016**

Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien, $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de $p \geqslant 2$ vecteurs de E. On suppose que, pour tout $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle < 0$. Montrer que $(x_1, \ldots, x_{p-1})$ est libre.

IV Exercices vraiment plus difficiles

***** Exercice 28 : Centrale 2009, Mines 2011, X 2015 et 2016**

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer qu'il existe un unique couple (K, P) avec $K \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{T}^+(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1; n]\!], t_{i,i} > 0$ vérifiant $M = KT$.
2) En déduire l'inégalité de Hadamard : $|\det| \leqslant \|C_1\| \dots \|C_n\|$ où $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de M.
3) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si ${}^tMM$ set diagonale.
4) Interpréter géométriquement pour $n = 2$ et $n = 3$.
5) Montrer que $|\det| \leqslant n^{\frac{n}{2}} \left(\max\limits_{i,j} |m_{i,j}| \right)^n$.

***** Exercice 29 : X 2014 et 2015**

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Déterminer :

$$\{\langle Ax, x\rangle, x \in \mathbb{R}^n\}$$

***** Exercice 30 : X 1998, 2004 et 2007, Ens 2012**

Soient $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \in S_3(\mathbb{R})$ et $B = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ extraite de A.
Soient $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leqslant \mu_2$ les valeurs propres de B.
Montrer que : $\lambda_1 \leqslant \mu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \mu_2 \leqslant \lambda_3$.

**** Exercice 31 : X 2007 et 2010, Centrale 2010**

Soient A et B dans $S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A^{2017}B^{2017} = B^{2017}A^{2017}$.

1) Exprimer les valeurs propres de A^{2017} en fonction de celles de A.
2) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $E_\lambda(A) = E_{\lambda^{2017}}(A^{2017})$.
3) Montrer que $E_\lambda(A)$ est stable par B^{2017}.
4) Montrer : $AB = BA$.

**** Exercice 32 : Ens 2016**

On appelle *matrice de Hadamard* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe α vérifiant, pour tout (i, j) , $|a_{i,j}| = \alpha$.

1) Déterminer α.
2) Pour $n = 2$, combien existe-t-il de telles matrices ?
3) Si A est une matrice de Hadamard, que dire de ${}^tA$?
4) Si $n \geqslant 3$, et s'il existe une matrice de Hadamard dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que n est divisible par 4.

***** Exercice 33 : Réduction des endomorphismes orthogonaux**

Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1) Montrer que si G est un sous-espace vectoriel stable par f alors $G^\perp$ aussi.
2) Montrer que $u = f + f^{-1}$ est un endomorphisme symétrique de E. En déduire l'existence d'un vecteur x non nul de E tel que $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ soit stable par f.

3) Montrer par récurrence sur la dimension de E que si f est un automorphisme orthogonal de E alors E est somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels de dimension 1 ou 2 stables par f.

4) En déduire l'existence d'une B.O.N. $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $\Delta = (1)$ ou $D = (-1)$ ou bien $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.