Fiche de révision propagation dans un plasma dilué

PIANKO Yanis

Prépa Moulay Idriss, Fès

Table des matières

Cette fiche de révision apporte des compléments sur les plasmas, ainsi qu'une vision et des méthodes autres que celles vues en cours. Il peut être intéressant et enrichissant de connaître les deux.

I Description d'un plasma

Pour savoir physiquement de quoi l'on parle lorsqu'il est question de plasmas, il faut nécessairement connaître quelques grandeurs caractéristiques et leur signification. **Attention**, il n'est pas nécessaire de connaître les expressions par cœur, seulement, vous devez être capable de retrouver 5 minutes chacune des quatre grandeurs présentées ci-dessous. Elles sont souvent utiles en début de sujet, et peuvent l'être en début ou fin d'exercice d'oral, lorsqu'il s'agit d'expliciter les hypothèses et approximations effectuées.

I.1 Longueur de Debye

À une échelle supérieure à la longueur de Debye, on peut considérer le plasma neutre. La distribution de Maxwell-Boltzmann nous donne[1] :

$$\begin{cases} n_e(r) = n_{e_0} \exp\left(\dfrac{eV(r)}{k_B T}\right) \\ n_i(r) = n_{e_0} \exp -\dfrac{eV(r)}{k_B T} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(r) = e\left(n_i(r) - n_e(r)\right) \\ \text{équation de Poisson } \Delta V + \dfrac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = 0 \end{cases}$$

On arrive à une équation (à établir tout seul !)

Définition

La longueur caractéristique est $\boxed{\lambda_D = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0 k_B T}{2 n_{e_0} e^2}}}$. C'est la longueur de Debye.

Remarque. On peut trouver rapidement $Q(r)$ la charge contenue dans une sphère de rayon r, en résolvant l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} - \dfrac{u}{\lambda_D} = 0$, où l'on a posé $u = rV(r)$.

I.2 La pulsation plasma

On néglige les collisions. On note d'un indice 1 les perturbation d'ordre 1 des grandeurs considérées, et d'un indice 0 la valeur de cette grandeur au repos. Pour une grandeur Z, on a $Z = Z_0 + Z_1$.

— Avec la conservation de la charge, trouver $n_{e_1}(x,t) = -n_0 \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$.

Démonstration. On prend une portion cylindrique de plasma, de section S et compris entre les abscisses x et $x + dx$ **au repos**. Ce système est fermé, et est déformé par le passage d'une onde électrique. On note $\xi(x)$ le déplacement des atomes ionisés du système à l'abscisse x, et $\xi(x + \mathrm{d}x)$ ceux d'abscisse $x + \mathrm{d}x$. Faire un schéma :

1. n étant la densité d'électrons ou d'ions selon l'indice

La charge du système au repos est $\delta Q = n_{e0} \times (-e) \times S\mathrm{d}x$, et elle se conserve. Donc $\delta Q = n_e(x,t) \times (-e) \times S \times (x + \mathrm{d}x + \xi(x+\mathrm{d}x) - x - \xi(x))$.
Ainsi, $n_e(x,t) = \dfrac{n_{e0}}{1+\frac{\partial \xi}{\partial x}} = n_{e0}\left(1 - \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)$. On obtient le résultat souhaité en remarquant que $n_e(x,t) = n_{e0} + n_{e1}$.

- On trouve le champ électrique résultant avec $\mathrm{div}\vec{E}_1 = -\dfrac{e n_{e_1}}{\varepsilon_0}$.
- Prendre la divergence de l'équation du mouvement : oscillateur harmonique.

Définition

La pulsation caractéristique d'oscillation est $\boxed{\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}}}$, où m est la masse d'un électron.

I.3 Paramètre plasma

Définition

Le paramètre plasma désigne le nombre typique d'électrons contenus dans la sphère de Debye.
$\Lambda = \dfrac{4}{3}\pi n_0 \lambda_D^3 = \dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_0^3 k_B^3 T^3}{2 n_{e_0} e^6}}$.

Proposition

$\dfrac{\langle E_c \rangle}{\langle E_p \rangle} \sim \Lambda^{\frac{2}{3}}$ donc le plasma est considéré dilué *si et seulement si* $\Lambda >> 1$.

Démonstration. $\langle E_c \rangle = \dfrac{1}{2} m (u^*)^2 = \dfrac{3}{2} k_B T$
$\langle E_p \rangle = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n_0^{-\frac{1}{3}}}$

I.4 Distance de Landau

Définition Distance de Landau

On définit la distance de Landau r_L par la relation $\dfrac{3}{2}k_B T = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_L}$. C'est une distance qui permet de relier l'énergie potentielle à l'énergie d'agitation thermique. Si $r_L >> n_{e_0}^{-\frac{1}{3}}$, on ne peut pas négliger les collisions.

II Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma dilué

II.1 Hypothèses

Le plasma est localement neutre. Ceci signifie que la distance entre deux atomes d est telle que $d >> \lambda_D$.
Pour chaque grandeur considérée Z (n la densité, ρ, p la pression, v la vitesse, etc.), on écrit $Z = Z_0$ [2] $+ Z_1$ [3].

Remarque. On fait souvent l'hypothèse du plasma *froid*, c'est à dire $\dfrac{\omega}{k} >> u^*$, ce qui permet de négliger les effets thermiques et donc la propagation des ondes acoustiques. Cependant, en complément culturel, on montre ici que pour un champ transverse, les ondes de pression dans le plasma sont rigoureusement nulles.

II.2 Équations fondamentales

- Équations de Maxwell, avec $\mathrm{div}\vec{E_1} = -\dfrac{en_1}{\varepsilon_0}$.
- Équations de conservation de la charge, avec $\rho = -en_1$.
- Équation du mouvement (négliger le poids, mais ne pas négliger les forces de pression, qui s'écrivent $-\vec{\mathrm{grad}}p_1$). [4]
- Linéariser $\vec{j_1} = -n_0 e\vec{v_1}(M,t)$ à l'ordre 1, car pour Z et X deux grandeurs, $Z_1 \times X_1$ est d'ordre 2.
- Justifier que l'on peut négliger $\vec{v_1} \wedge \vec{B_1}$ devant $\vec{E_1}$, car $\dfrac{\left\|\vec{v_1} \wedge \vec{B_1}\right\|}{\left\|\vec{E_1}\right\|} \sim \dfrac{v}{c}$ d'après la relation de structure des ondes planes. On se place dans des hypothèses non relativistes.

II.3 Champ transverse

Pour un champ transverse, $\underline{\vec{E_1}}(M,t) = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\vec{e_y}$. Alors,

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow n_1 = 0$$

Donc $\mathrm{div}(\vec{v_1}) = 0 \Rightarrow \vec{v_1}$ est transverse.
Il suffit alors d'écrire l'équation du mouvement et d'en prendre la divergence. On trouve $\Delta p_1 = 0$, et en cherchant une solution de la forme $\underline{p_1}(M,t) = p_{1,0}e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$, on trouve $p_{1,0} = 0$ donc finalement que la variation de pression due à la propagation d'un champ **transverse** est *rigoureusement* nulle.

Astuce : Ne mettez pas le terme de pression dans l'équation du mouvement, mais il faut savoir justifier son absence comme cela (pour un champ **transverse**, je le répète mais c'est important) si on vous le demande.

Remarque. Vous remarquez les différences de traitement dans la propagation d'ondes selon la polarisation, d'où l'importance des polarisatons elles-mêmes.

Ré-écrire l'équation du mouvement simplifiée, et faire apparaître $\vec{j_1}$. Nous avons procédé ici avec les opérateurs vectoriels mais vous êtes passé en complexe dans votre cours. Les deux méthodes se valent, il faut maîtriser les deux. On obtient la relation **constitutive** d'un plasma *pour une onde transverse électrique.*

2. uniforme
3. petite variation
4. Ici, on va justifier le fait que la force de pression est rigoureusement nulle, parce que le champ est **TRANSVERSE**. Vous pouvez si vous le voulez passer sous silence le terme de pression et le négliger.

Définition

Relation constitutive du plasma pour une onde transverse électrique : $\dfrac{\partial \vec{j_1}}{\partial t} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \vec{E_1}$.

Remarque. Cette relation est constitutive, ceci signifie que si on la retrouve, on pourra considérer le milieu dans lequel on est placé comme un plasma.

En passant en complexe, on peut exprimer la conductivité complexe $\underline{\gamma} = -i\varepsilon_0 \dfrac{\omega_p^2}{\omega}$, et l'on a ainsi :

$$\langle \vec{j_1}.\vec{E_1} \rangle = \frac{1}{2} \left\| \vec{E_1} \right\|^2 \Re\left(\underline{\gamma}\right) = 0$$

Pas d'énergie dissipée ! ! En effet, pas de collision, pas d'énergie dissipée, et pas d'énergie dissipée . . . bah pas d'énergie dissipée !

II.4 Équation de propagation du champ électrique

Équation de propagation du champ électrique

$$\Delta \vec{E_1} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E_1}}{\partial t} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E_1}$$

Il faut savoir la retrouver :

- Équations de Maxwell
- $\mathrm{div}\vec{E_1} = 0 \Rightarrow n_1 = 0$.
- Linéariser l'équation du mouvement.
- Lien entre $\vec{j_1}$ et $\vec{E_1}$.
- Prendre le double $\vec{\mathrm{rot}}$ de $\vec{E_1}$.

II.5 Relation de dispersion

Klein Gordon

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.$$

On peut alors définir un indice complexe $\underline{n} = \dfrac{c}{\frac{\omega}{\underline{k}}} = \dfrac{c\underline{k}}{\omega}$.

Remarque. On a alors $\underline{n}^2 = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$.

II.6 Zone de transparence

Si $\omega > \omega_p$, alors $\underline{k} \in \mathbb{R}$. Il y a propagation. $\underline{n} \in \mathbb{R}$ désigne alors l'indice de réfraction.
$v_\varphi > c$, elle n'apas d'existence réelle. Une onde purement sinusoïdale harmonique n'a pas de signification physique.
$v_g < c$. On aboutit alors à une relation de structure adaptée pour le milieu des plasmas :

Relation de structure dans les plasmas

$$\underline{\vec{B_1}} = n \times \frac{\vec{e_x} \wedge \underline{\vec{E_1}}}{c}$$
$$\vec{B} = \frac{n}{c}\left(\vec{u} \wedge \vec{E}\right)$$
$$\left\|\vec{B}\right\| = \frac{n}{c}\left\|\vec{E}\right\|$$

On déduit facilement de la relation de structure le vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$.

II.7 Zone d'opacité

Si $\omega < \omega_p$, alors $\underline{k} \in i\mathbb{R}$, il n'y a pas de propagation, mais des ondes évanescentes. $\underline{n} \in i\mathbb{R}$, n'' désigne l'indice d'extinction, $\underline{n} = -in''$.

On peut calculer $\vec{E_1}$ et $\vec{B_1}$, atténués sur une distance $\frac{1}{|k''|} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$, et $\langle\vec{\Pi}\rangle = \vec{0}$.

II.8 Réflexion d'une onde électromagnétique en incidence normale sur un plasma

$$\begin{cases} x \leqslant 0 : \vec{E}\,(x \leqslant 0, t) = E_0 e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)}\vec{e_y} + \underline{r}E_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\omega}{c}x\right)}\vec{e_y} \\ x \geqslant 0 : \vec{E}\,(x \geqslant 0, t) = \underline{t}E_0 e^{i\left(\omega t - \underline{n}\frac{\omega}{c}x\right)}\vec{e_y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leqslant 0 : \vec{B}\,(x \leqslant 0, t) = \frac{E_0}{c} e^{i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right)}\vec{e_z} - \underline{r}\frac{E_0}{c} e^{i\left(\omega t + \frac{\omega}{c}x\right)}\vec{e_z} \\ x \geqslant 0 : \vec{B}\,(x \geqslant 0, t) = \underline{nt}\frac{E_0}{c} e^{i\left(\omega t - \underline{n}\frac{\omega}{c}x\right)}\vec{e_z} \end{cases}$$

On raccorde par continuité, et on peut trouver $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

— La composante tangentielle de $\vec{E}$ et normale de $\vec{B}$ sont toujours continues.

— Si il y a des courants en surfaces ou des charges en surface, $\vec{E}.\vec{n_S}$ et $\vec{B} \wedge \vec{n_S}$ discontinues.

Les relations de passage (à ne pas connaître nécessairement par cœur, ce qu'il y a juste au dessus suffit) sont :

$$\boxed{\text{milieu 1}}\Big|\xrightarrow{\vec{n_{1\to2}}}\boxed{\text{milieu 2}}$$

$$\vec{E_2} - \vec{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n_{1\to2}}, \quad \vec{B_2} - \vec{B_1} = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n_{1\to2}}$$

où σ et $\vec{j_s}$ sont les charges et courants surfaciques.

II.9 Bilan énergétique

On suppose $\omega > \omega_p$.

— On écrit $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

— On écrit la densité d'énergie cinétique électronique : $e_C = \frac{1}{2}n_{e0}mv^2$.

— On se rappelle que $m\frac{\partial v}{\partial t} = -e\vec{E}$.

On obtient alors e_C et donc $\langle e_C\rangle$.

Avec $u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{\vec{B}^2}{\mu_0} \Rightarrow$ On obtient u_{em} et donc $\langle u_{em}\rangle$.

$u_{tot} = u_{em} + e_C$, et on retrouve ainsi en remplaçant :

$$\frac{\partial u_{tot}}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{\Pi} = 0$$

II.10 Complément : propagation d'une onde longitudinale

On considère non plus une onde transverse mais une onde longitudinale,

$$\underline{\vec{E}_1} = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e_x}$$

Alors, $\vec{\text{rot}}\vec{E_1} = \vec{0} \Rightarrow -\dfrac{\partial \vec{B_1}}{\partial t} = \vec{0}$. Puisque l'on ne considère que les signaux qui se propagent (pas de champ permanent), $\vec{B_1} = \vec{0}$.
Avec les trois équations du plasma,

- $\text{div } \vec{E_1} = \dfrac{-en_1}{\varepsilon_0}$
- $m\dfrac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} = -e\vec{E_1}$ (plasma froid)
- $\dfrac{\partial n_1}{\partial t} + n_{e0}\text{div}\,(\vec{v_1}) = 0$

on trouve

$$\boxed{\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + \omega_p^2 n_1 = 0}$$

Ainsi, n_1, et donc par la même $\vec{E_1}$, oscille à la pulsation $\omega = \omega_p$ (car $\text{div}\vec{E_1} = \dfrac{-en_1}{\varepsilon_0}$), et ce $\forall k$, donc la vitesse de groupe est nulle, $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = 0$. Il n'y a pas de propagation ! C'est pourquoi l'étude d'une onde transverse dans un plasma est plus intéressante.