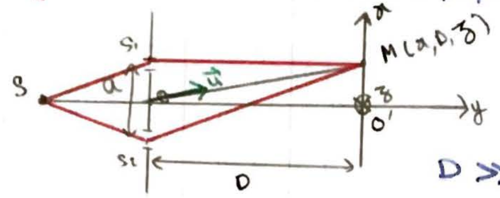
Dispositif interférentiel par division du front d'onde : les trous d'Young.

I) Le dispositif des trous d'Young :

Il y a division du front d'onde lorsque les 2 rayons lumineux venant interférer en un point M sont issus de 2 rayons distincts émergeant de la source.

Ondes diffractées. (S_1 et S_2 mutuellement cohérentes)

Interférences non localisées, pareil pour tous les dispositifs en division du front d'onde.



$$\delta(M) = n_{air}(SS_1 + S_2M) - n_{air}(SS_1 + S_1M).$$

$$= n(S_2M - S_1M).$$

$D \gg |y|, |z|$ et $D \gg a$.

Vecteurs : $\overrightarrow{S_1M}^2 = (\overrightarrow{S_1O} + \overrightarrow{OM})^2 = S_1O^2 + OM^2 - 2\,\overrightarrow{OS_1}\cdot\overrightarrow{OM}$.
On pose $r = OM$.

$$\overrightarrow{S_1M}^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2\,\overrightarrow{OS_1}\cdot\overrightarrow{OM} = r^2\left(1 - \frac{2\,\overrightarrow{OS_1}\cdot\overrightarrow{OM}}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}\right).$$

D'où $S_1M = r\left(1 - \frac{2\overrightarrow{OS_1}\cdot\overrightarrow{OM}}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}\right)^{1/2} = r\left(1 - \frac{\overrightarrow{OS_1}\cdot\overrightarrow{OM}}{r^2} + \underbrace{o\left(\frac{a}{r}\right)}_{O\left(\frac{a}{r}\right)}\right)$

$$\simeq r - \frac{\overrightarrow{OS_1}\cdot\overrightarrow{OM}}{r}$$

De même pour $S_2M = r - \frac{\overrightarrow{OS_2}\cdot\overrightarrow{OM}}{r}$.

D'où $\boxed{\delta(M) = n_{air}\,\vec{u}\cdot\overrightarrow{S_2S_1}}$, $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}$.

Astuce : $\delta = n(S_2M - S_1M) = n\,\frac{S_2M^2 - S_1M^2}{S_1M + S_2M} = n \times \frac{2(\overrightarrow{OS_1} - \overrightarrow{OS_2})\cdot\overrightarrow{OM}}{S_2M - S_1M}$

$\simeq n \times \frac{2\,\overrightarrow{S_2S_1}\cdot\overrightarrow{OM}}{2r}$ ← $O(a)$. ← Évaluer à l'ordre 0 : r

$O\left(\frac{a}{D}\right)$ ⟶ $\delta = n \times \overrightarrow{S_2S_1}\cdot\vec{u}$.

$\Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_{air}\,\vec{u}\cdot\overrightarrow{S_2S_1}$, $p(M) = \frac{n_{air}\,\vec{u}\cdot\overrightarrow{S_2S_1}}{\lambda_0}$.

- $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e_x} + D\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z}$. $r = \sqrt{x^2 + D^2 + z^2} \simeq D$. D'où $\vec{u} \simeq \frac{x}{D}\vec{e_x} + \vec{e_y} + \frac{z}{D}\vec{e_z}$.

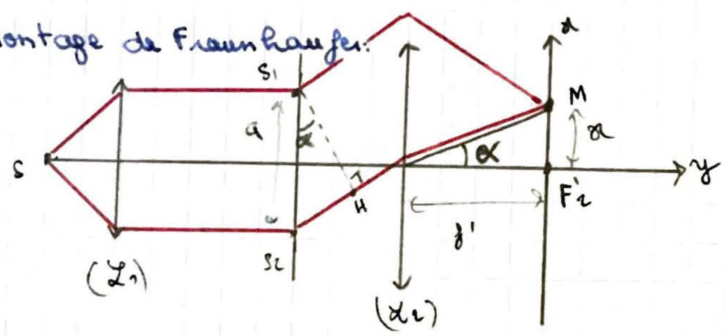
$\overrightarrow{S_2S_1} = a\,\vec{e_x}$. Alors $\boxed{\delta(M) = \frac{n_{air}\,a x}{D}}$.

⚠ x : abscisse comptée depuis la méd. de $[S_2S_1]$.

$\Delta\varphi(M) = n\,\frac{2\pi a x}{D}$. $p(M) = n\,\frac{a x}{\lambda_0 D}$.

$$\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0\left(1 + \cos\left(2\pi n \frac{a x}{\lambda_0 D}\right)\right).\quad \text{D'où } i = \frac{\lambda_0 D}{n a}.$$

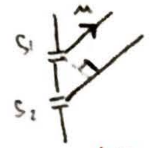
Montage de Fraunhofer :



$\delta(M) = n_{air}\,S_2H$.

$= n_{air}\,a \sin\alpha \simeq n\,a\,\alpha$

D'où $\boxed{\delta(M) \simeq \frac{n a x}{f'}}$

Rem : 

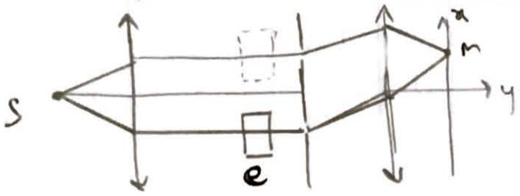
$\delta(M) = n\,\vec{u}\cdot\overrightarrow{S_2S_1}$.

$\Delta\varphi(M) = \dfrac{2\pi\, m a x}{\lambda_0 f'}$, $p(M) = \dfrac{m a x}{\lambda_0 f'}$, $\mathcal{E}(M) = 2\mathcal{E}_0\left(1 + \cos\left(2\pi\left(\dfrac{m a x}{\lambda_0 f'}\right)\right)\right)$

d'où $i = \dfrac{\lambda_0 f'}{m a}$.

II) Modification du dispositif :

1)



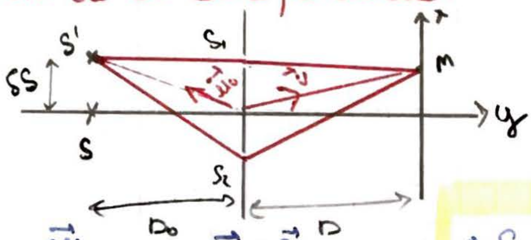
$\delta(M) = (n - n_{air})e + n_{air}\dfrac{a x}{f'}$.

$p(M) = n_{air}\dfrac{a x}{\lambda_0 f'} + (n - n_{air})\dfrac{e}{\lambda_0}$.

i reste inchangé. décalage $\longrightarrow$ $\Delta\varphi(M) = 2\pi\, n_{air}\dfrac{a x}{\lambda_0 f'} + 2\pi(n - n_{air})\dfrac{e}{\lambda_0}$.
des franges.

$$\boxed{\Delta x_{\text{sans} \to \text{avec}} = -\frac{e f'}{a}\left(\frac{n}{n_{air}} - 1\right).}$$ (exprimer $x_{p_{sans}}$ et $x_{p_{avec}}$).

2) déplacement de la source ponctuelle :



$\delta(M) = [S_2M] - [S_1M] + [S'S_2] - [S'S_1]$.

$= n_{air}\dfrac{a x}{D} + \underbrace{n_{air}\,\vec{u_0}\cdot\overrightarrow{S_2S_1}}_{\Delta\delta}$.

$\vec{u_0} = \dfrac{\overrightarrow{OS'}}{\|\overrightarrow{OS'}\|} \simeq \dfrac{\overrightarrow{OS'}}{D} = \dfrac{\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{\delta S}}{D_0}$.

$$\boxed{\Delta\delta = \frac{\overrightarrow{\delta S}\cdot\overrightarrow{S_2S_1}}{D_0}\, n_{air}.}$$

Decalage $\leftarrow$ ou $\otimes$ n'influence pas les franges ou la différence de marche.
$\longrightarrow$ source allongée dans la direction $\perp$ à $\vec{e_x}$. trous $\to$ fentes.
↳ sources ponctuelles incohérentes.

Rem : visibilité des franges pour 2 sources incohérentes. $\delta S = b$.

$\delta_{S'}(M) = \dfrac{n_{air}\, a x}{D} + \dfrac{n_{air}\, a b}{D_0}$. S : $x_p = \dfrac{\lambda_0 D}{n_{air}\, a}\cdot p$

$\Delta p(M) = \dfrac{n_{air}\, a b}{\lambda_0 D_0}$. S' : $x_p = \dfrac{\lambda_0 D}{n_{air}\, a}p - \dfrac{D}{D_0}b$.

D'où $\boxed{\Delta x_p = -\dfrac{D}{D_0}b = -\Delta p(M)\times i.}$

On peut additionner les éclairements : $\mathcal{E}_{tot}(M) = 4\mathcal{E}_0\left(1 + \cos\Big(\underbrace{\pi\dfrac{D}{D_0}\dfrac{b}{i}}_{\pi\Delta p(M)}\Big)\cos\left(\dfrac{2\pi x}{i} + \pi\dfrac{D}{D_0}\dfrac{b}{i}\right)\right)$

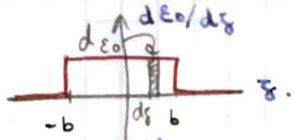
D'où $V = |\cos(\pi\Delta p)|$.

D'où distance minimale provoquant un brouillage :

$$\boxed{b_{1/2} = \frac{\lambda_0 D_0}{2 n_{air}\, a}.}$$

Visibilité des franges produites par une source étendue :

source entre $z=-b$ et $z=b$.



$$d\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0 \frac{dz}{2b}.$$

$$d\mathcal{E} = 2\, d\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos\Big(\underbrace{\frac{2\pi n_{air} a x}{\lambda_0 D}}_{\Delta\varphi} + \frac{2\pi a z}{\lambda_0 D_0}\Big)\right)$$

On intègre entre $-b$ et $+b$.

$$\mathcal{E}_{tot}(M) = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \text{sinc}\Big(\frac{2\pi n_{air} a b}{\lambda_0 D_0}\Big) \cos(\Delta\varphi)\right). \quad V = \Big|\text{sinc}\Big(\underbrace{\frac{\pi n_{air} a (2b)}{\lambda_0 D_0}}\Big)\Big|.$$

visible si <1.
sinon : brouillé.

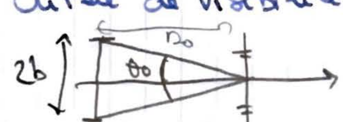
On associe les sources 2 à 2, distantes de $b_{1/2}$.

Si $b > b_{1/2}$ ~~ok~~ $b < b_{1/2}$. franges visibles. (pas top.)
$b = b_{1/2}$. non visibles.

$b = b_{1/2} \Leftrightarrow |\Delta p| = \frac{1}{2}$. $|\Delta p| = |p_{S'}(M) - p_S(M)| = \frac{n_{air}\, a b}{\lambda_0 D_0} \leq \frac{1}{2}$

Critère de visibilité. $S \to$ centre. $\Leftrightarrow$ franges visibles.
$S' \to$ bord.

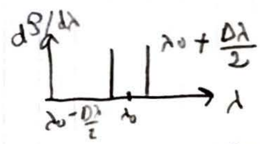
Rem : critère de visibilité : $a \leq \frac{\lambda_0 D_0}{n_{air}(2b)} := \ell_s$. longueur de cohérence spatiale.



$$\theta_0 \simeq \frac{2b}{D_0}. \quad \ell_s = \frac{\lambda_0}{n_{air}\theta_0}.$$

3) Influence de la largeur spectrale :

λ_1 et λ_2, tq



$$\mathcal{E}_1 = 2\mathcal{E}_0\left(1 + \cos\Big(2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}}\Big)\right), \quad \mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}_0\left(1 + \cos\Big(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}}\Big)\right).$$

ABSOLUMENT à maîtriser : ~~x ... franges sombres~~ abscisse des brouillages.

franges sombres : λ_1 : $p_1(M) = \left(p + \frac{1}{2}\right)$.

—— brillantes λ_2 : $p_2(M) = q$

$$\Delta p(M) = m + \frac{1}{2}. \qquad \delta(M)\,(\sigma_2 - \sigma_1) = m + \frac{1}{2} \text{ ; et } \delta(M) = \frac{n a x}{D}.$$

D'où $$x_m = \frac{D}{na} \times \frac{m + \frac{1}{2}}{\sigma_2 - \sigma_1}. \qquad \Delta x = \frac{D}{n \cdot a} \times \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}.$$

Si λ_1, λ_2 proches, $\Delta\lambda \ll \lambda_m$, $\sigma_2 - \sigma_1 \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m^2} \Rightarrow \Delta x = \frac{D}{n \cdot a} \cdot \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$

$i = \frac{\lambda_m D}{n a}$ interfrange pour λ_m.

Nbre de maxima d'éclairement entre 2 brouillages. $N = \frac{\Delta x}{i} = \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda}$.

Valeur exacte : $\frac{2\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}$

Bonne visibilité des franges si $\delta(M) \leq \frac{1}{\Delta\sigma} := l_c$.

$|\Delta p(M)| \leq \frac{1}{2}$.

$\simeq \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}$ si λ_1, λ_2 proches.

En lumière blanche, pour un certain $\delta(M)$:

$\exists$ plusieurs λ_i tq $\frac{\delta(M)}{\lambda_i} = m_i + \frac{1}{2}$, avec $\lambda_{min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{max}$.

Il n'y a pas cette radiation ds le blanc → blanc d'ordre supérieur.