Devoir Libre et compléments

PIANKO Yanis

1 Topologie et evn : compléments

Topologie

Les notions d'ouverts, de fermés, de compacts, d'adhérance, d'intérieur, de voisinage ont étés définies dans le cas d'un espace vectoriel normé (E, N). Ces notions sont aussi utilisées pour d'autres espaces, mais les définitions qu'on en donne ne sont pas toutes les mêmes : elles sont spécifiques à l'espace étudié, et plus explicites. Ces définitions restent cohérentes avec la définition générale suivante, pour tout espace dit « topologique » : Sur un ensemble E, on définit une topologie T comme un ensemble de parties de E vérifiant les 3 propriétés suivantes :

- E et $\varnothing \in T$
- T est stable par intersection finie : si $X, Y \in T, X \cap Y \in T$
- T est stable par union quelconque : $\forall I$ ensemble d'indices (fini, infini, voire indénombrable), si $(X_i)_{i \in I} \in T$, $\bigcup\limits_{i \in I} X_i \in T$

Alors, par définition, un sous ensemble X de E est un ouvert de E pour la topologie T si et seulement si $X \in T$. On peut alors considérer T comme l'ensemble des ouverts de E selon T. (E, T) est appelé espace topologique. On donne alors les définitions suivantes :

- Un sous-ensemble de E est dit fermé dans (E, T) si son complémentaire dans E est ouvert dans (E, T).
- Un voisinage d'une partie A de E est un ensemble qui contient un ouvert de E contenant A. Un voisinage de $x \in E$ est un voisinage de $\{x\}$.
- L'adhérance d'une partie A de E est l'intersection de tous les fermés de E contenant A. C'est donc le plus petit (au sens de $\subset$) fermé contenant A.
- L'intérieur d'une partie A de E est l'union de tous les ouverts contenus dans A. C'est donc le plus grand ouvert contenu dans A.
- La frontière d'une partie A de E peut-être définie de différentes faços :
  (i) $\bar{A} \backslash \mathring{A}$
  (ii) $\bar{A} \cap \overline{E \backslash A}$
  (iii) Ensemble des « points frontières »de A, i.e des points $p \in E$ dont tout voisinage contient au moins un point de A et un point qui n'appartient pas à A.

La topologie de l'espace peut-être *induite*, par un produit scalaire (on parle alors d'espace préhilbertien) ou une norme par exemple (on parle d'espace vectoriel normé).

Espace de toutes les topologies

Il existe une relation binaire $\subseteq$ (« est plus fine que ») qui définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble de toutes les topologies possibles sur E.
Exemples :

(a) La plus fine, la topologie discrète : tous les sous ensembles sont ouverts, comme pour $\mathbb{N}$.

(b) La moins fine, la topologie grossière : Les seuls ouverts sont $\varnothing$ et E.

Soit $f : (E_1, T_1) \mapsto (E_2, T_2)$.
On dit que f est une application continue si l'image réciproque par f de chaque ouvert est un ouvert, et de manière équivalente si l'image réciproque par f de chaque fermé est un fermé.
On dit que f est une application ouverte si l'image par f de chaque ouvert est un ouvert. On dit que f est une application fermée si l'image par f de chaque fermé est un fermé.

Sur un ensemble E, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $T_1 \subseteq T_2$
- L'application identité $id_E : (E, T_2) \mapsto (E, T_1)$ est continue.
- L'application identité $id_E : (E, T_1) \mapsto (E, T_2)$ est ouverte, donc de manière équivalente, fermée.
- Toute partie ouverte pour T_1 est ouverte pour T_2.
- Toute partie fermée pour T_1 est fermée pour T_2.
- $\forall x \in E$, tout voisinage de x pour T_1 est voisinage de x pour T_2.
- Pour toute partie A de E, l'adhérance de A pour T_2 est contenue dans l'adhérance de A pour T_1.

Les espaces topologiques les plus couramment étudiés sont munis de diverses structures supplémentaires :
espaces métriques, espaces vectoriels normés, espaces euclidiens, espaces hermitiens, espaces hilbertiens, espaces de Banach, ...

Espaces topologiques particuliers

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ muni d'une topologie T. On dit que (E, T) est un espace vectoriel topologique si les opérations

(x,y) $\in E \times E \mapsto x + y \in E$
$(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda.x \in E$

sont continues.
On s'interesse aux espaces métriques, espaces topologiques dont la topologie est induite par une aplication « distance »telle que :

$$\begin{gathered}\text{- } \forall x, y \in E, d(x,y) = d(y,x) \\ \text{- } \forall x, y \in E, d(x,y) = 0 \iff x = y \\ \text{- } \forall x, y, z \in E, d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)\end{gathered}$$

Dans ces espaces particuliers, on peut définir une boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$: $\mathcal{B}(x,r) = \{y \in E, d(x,y) \leqslant r\}$. Dans ces espaces, on procède souvent à une introduction différente des différentes notions, en s'appuyant sur des propriétés importantes et propres à l'espace en question.
On définit d'abord un voisinage d'un point $a \in E$. Soit V une partie de E. On dit que V est un voisinage de $a$lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a,r) \subset V$. On introduit ensuite la notion d'ouvert : une partie A de E est un *ouvert* (ou une *partie ouverte*) de E lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points. Autrement dit, A est ouvert lorsque :

$$\forall x \in A, \exists r > 0 \text{tel que} \mathcal{B}(a,r) \subset A$$

On peut enfin introduire la notion de topologie : l'ensemble des parties ouvertes de E est appelé la topologie de E. Les autres notions s'en déduisent.

Remarque : On peut aussi prendre comme point de départ la notion de point intérieur a grâce à la boule ouverte de centre a et d'un rayon $r > 0$, puis définir l'intérieur d'une partie et enfin un ouvert. Cette démarche ou la précédente est généralement celle adoptée lorsque l'on se cantonne aux espaces métriques, ou en particulier aux espaces vectoriels normés.

En effet, un espace vectoriel normé (E, N) est un certain type d'espace métrique, puisque $d : (x,y) \mapsto N(x-y)$ est une distance.

Il y a donc des points TRÈS IMPORTANTS À NE PAS OUBLIER : un espace vectoriel normé n'est pas nécessairement de dimension finie, on l'a défini très clairement sans faire appel à la notion de dimension grâce aux espaces topologiqes.

- Les normes ne sont pas toutes équivalentes.
- Les applications linéaires ne sont pas nécessairement continues.
- Les sev ne sont pas nécessairement fermés.
- Les compacts ne sont pas LES fermés bornés. Un compact est fermé borné.
- La continuité séquentielle n'implique pas la continuité.

2 Devoir

Illustrations et exercices généraux

1. Prouver un théorème de Riesz : soit E un evn. E de dimension finie $\iff$ La boule fermée unité est compacte.
2. Démontrer que deux normes sont équivalentes si et seulement si elles induisent les mêmes topologies.
3. Démontrer l'équivalence : $N_1 \sim N_2 \iff$ toute suite (u_n) converge pour N_i converge pour N_{3-i}, avec $i \in \{1,2\}$. Montrer qu'elles convergent vers la même limite.
4. Donner un exemple de fonction linéaire et non continue.
5. Soient $(E_i, \| \ \|_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ p evn de dimension finie, et $M : E_1 \times \ldots \times E_p \to F$ p-linéaire. Montrer que $\exists K \in \mathbb{R}_+$, tel que $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} E_i$ alors $\|M(x_1, \ldots, x_p)\|_F \leqslant K \|x_1\|_F \ldots \|x_p\|_F$. En déduire que M est continue.
6. Montrer que $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est de dimension infinie.(S'interesser aux normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$).
7. Soit $f : (E, N_E) \to (F, N_F)$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Montrer qu'elle est continue si et seulement elle est lipschitzienne.

Formes linéaires et dual topologique

Etant donné E un espace vectoriel topologique, on note E' son dual topologique, i.e. l'ensemble des formes linéaires continues $\varphi : E \to \mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle). Dans le cas d'un espace préhilbertien (i.e. quand la topologie provient d'un produit scalaire), toute forme linéaire continue est obtenue via le produit scalaire avec un élément de E. Dans le cas d'un espace vectoriel normé de dimension infinie, il est beaucoup plus délicat de comprendre E'. Pour ce faire on est amené à étudier le bidual (topologique) $E'' := (E')'$. On pose J l'injection canonique :

$$J : x \in E \mapsto \delta_x \in E'',$$

où l'application

$$\delta_x : \varphi \in E' \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}$$

est appelée évaluation en x.

1. Montrer que δ_x est linéaire et continue.
2. En déduire que J est continue et injective, puis que c'est une isométrie, i.e qu'elle conserve la norme.
3. On dit que (E, N_E) est réflexif lorsque $J(E) = E''$. Soit $p \in]1, +\infty[$. On note $\ell_p(\mathbb{R}) := \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geqslant 0} |x_n|^p < +\infty\}$, muni de la norme $N_p(x) := (\sum_{n \geqslant 0} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Montrer que le dual topologique de $\ell_p(\mathbb{R})$ est $\ell_q(\mathbb{R})$, où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   Remarque : Ceci montre que $\ell_q(\mathbb{R})$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$

Espaces complets

Une suite (r_n) de réels ou de complexes est dite de Cauchy, ou vérifie le critère de Cauchy, lorsque les termes de la suite se rapprochent uniformément les uns des autres en l'infini au sens où :
$\lim_{p,q\to\infty} |r_p - r_q| = 0.$
On peut aussi écrire :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geqslant N \quad |r_p - r_q| < \varepsilon,$

ou encore :
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall k \geqslant 0 \quad |r_{n+k} - r_n| < \varepsilon.$
L'uniformité dans la définition est importante : il ne suffit pas que la différence des termes tende vers 0.
Dans un espace métrique (E, d) muni d'une distance invariante, i.e telle que $\forall x, y, z \in E, d(x+z, y+z) = d(x, y)$, une suite est dite de Cauchy si elle vérifie l'une de ces propriétés (qui sont équivalentes) :

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geqslant N \quad d(x_p, x_q) < \varepsilon$,

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall q \geqslant N \quad d(x_N, x_q) < \varepsilon$,

- $\lim_{p,q\to\infty} d(x_p, x_q) = 0,$

- Le diamètre de l'ensemble des termes d'indices supérieur à n tend vers 0 quand n tend vers l'infini : $\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geqslant n} d(x_m, x_n) = 0.$

1. Donner un exemple d'une suite dont la différence des termes tend vers 0 sans vérifier le critère de Cauchy.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$. Montrer en considérant (x_n^2) que cette suite est de Cauchy. Montrer qu'elle converge dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{Q}$.

   Un espace métrique dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit complet. Ainsi, dans un espace métrique, toute suite convergente est de Cauchy, mais la réciproque n'est vraie que dans un espace complet.
   Soit (E, T) un espace vectoriel topologique complet. On dit que c'est un espace :

   - de Hilbert si T provient d'un produit scalaire ;
   - de Banach si T provient d'une norme ;

3. Soit (K, d) un espace métrique compact et (F, N) un espace de Banach. On considère $E = C^0(K, F)$ l'espace des applications continues sur K à valeurs dans F, muni de la norme $N_\infty(f) := \underset{x\in K}{sup} N(f(x))$. Montrer que (E, N_∞) est un espace de Banach.
4. Montrer qu'un espace vectoriel normé de dimension fini est de Cauchy.

Espaces quotients

On note E/F l'espace quotient, ensemble des classes d'équivalence pour la relation $x \sim y \iff x - y \in F$. C'est un espace vectoriel lorsqu'il est muni des lois $\widetilde{x} + \widetilde{y} := \widetilde{x+y}$ et $\lambda.\widetilde{x} = \widetilde{\lambda.x}$.
On pose $\bar{N} : \widetilde{x} \in E/F \mapsto inf\{N(y) | \widetilde{y} = \widetilde{x}\} \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que $\bar{N}$ est une semi-norme sur E/F, c'est à dire une application homogène de E dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie l'inégalité triangulaire (mais pas nécessairement la séparation).

(b) Montrer que c'est une norme si et seulement si F est fermé.

(c) Si F est fermé et E est un Banach, montrer que $(E/F, \bar{N})$ est un Banach.