DL sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

PIANKO Yanis

Prépa Moulay Idriss, Fès

Ce DL présente des résultats classiques et à savoir sur les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, cependant c'est un DL de niveau 2, car il n'utilise ni n'applique des points cruciaux du cours. Quelques applications en découlent, il faut se dire que celles-ci sont des exercices d'oraux pour lesquels il n'y avait pas ce DL en questions préliminaires.

I Préliminaires

1 Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, et a la borne inférieure de $G \cap [0, +\infty[$. Montrer que :
- Si a n'est pas nul, alors $G = a\mathbb{Z}$
- Si a est nul, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

2 Soient x et y deux réels strictement positifs. Soit $G(x, y)$ le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par x et y. Montrer que
- $\dfrac{x}{y}$ est rationnel *si et seulement si* $\exists a \in \mathbb{R} \mid G = a\mathbb{Z}$.
- $\dfrac{x}{y}$ est irrationnel *si et seulement si* $G(x, y)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3 En déduire que, si x est irrationnel, le sous-groupe $G(x, 1) = \left\{mx + n \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2\right\} = x\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4 Application : Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + a) = f(x + b)$.

II Amélioration de la propriété démontrée

5 Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que si l'on a $0 < mx + ny < \inf(x, y)$, avec m et n entiers relatifs, alors m et n sont non nuls et de signe opposés.

6 Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{x}{y}$ soit irrationnel. Montrer qu'il existe une suite d'entiers relatifs (n_p) et une suite d'entiers strictement positive (m_p) telle que la suite $(x_p = m_p x + n_p y)$ soit positive et converge vers 0.
Utiliser la question précédente, et faire une disjonction de cas. On peut conclure tout de suite dans un des cas avec une suite extraite, sinon, il faut poser une suite $y_p = x_{\varphi(p)} - x_{\varphi p+1}$ pour φ bien choisi, et conlure avec une suite extraite.

7 En montrant que si $\dfrac{x}{y}$ est irrationnel, $x\mathbb{N}^* + y\mathbb{Z}$ est dense dans $G(x, y)$, déduire que $\overline{x\mathbb{N}^* + y\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

III Applications

8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
- (a) Soit $x \in \mathbb{R}^2$ unitaire. Existe-t-il $M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $\overline{\{M^k x, k \in \mathbb{N}\}} = S_{\mathbb{R}^2}(0, 1)$.
- (b) Soit $x \in \mathbb{R}^3$ unitaire. Existe-t-il $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $\overline{\{M^k x, k \in \mathbb{N}\}} = S_{\mathbb{R}^3}(0, 1)$.

9 Soit α irrationnel.

(a) (question intermédiaire ajoutée) Soient a, b tels que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. Montrer qu'il existe $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $a < m\alpha - n < b$.

(b) En déduire que $\overline{\{m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor \mid m \in \mathbb{N}\}} = [0, 1]$.

10 (a) Soit f une fonction continue et périodique de période T. Montrer que si $\frac{\alpha}{T}$, $\overline{\{f(m\alpha) \mid m \in \mathbb{N}\}} = f(\mathbb{R})$.

(b) En déduire que les suites $\sin(n)$ et $\cos(n)$ sont denses dans $[-1, 1]$.