Exercices Colles Stage intensif

PIANKO Yanis

Prépa Moulay Idriss, Fès

Ces exercices sont centrés sur le thème de la convergence : ils couvrent suites et séries (numériques et de fonctions), séries entières

I Écoles normales supérieures

I.1 Cachan 2007, MP

Soit (a_n) une suite réelle. Montrer qu'il y a équivalence entre :

— $\sum |a_n|$ converge

— pour toute suite réelle (b_n) de limite nulle, $\sum a_n b_n$ converge

II École Polytechnique

II.1 X 2007, MP

Calculer $\dfrac{1}{1\times 2} - \dfrac{1}{3\times 4} + \dfrac{1}{5\times 6} \dots$

II.2 X 2009, MP

Soit $f: \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-n\left(x^2+y^2\right)}}{n^2+\sqrt{n}}$. La fonction f est-elle continue, différentiable, de classe $\mathcal{C}^2$?

II.3 X ESPCI 2009, PC

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_n > 0$ tel que :

$$\forall (k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n, \frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} < 1 \Rightarrow \frac{1}{k_1} + \dots \frac{1}{k_n} < 1 - \varepsilon_n$$

II.4 X ESPCI 2012, PC

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Caractériser la limite de $\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a}{n} \\ -\dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ quand n tend vers $+\infty$.

II.5 X ESPCI 2012, PC

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. Déterminez la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

II.6 X ESPCI 2012, PC

Soit $\alpha > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k!)^\alpha$. Donner un équivalent de u_n.

II.7 X ESPCI 2009, PC

Soit $S : \ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$. Déterminer le domaine de définition de S. Étudier la continuité de S.

II.8 X ESPCI 2012, PC

Étudier la convergence de la suite $f_n : \ x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \mapsto \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$.

II.9 X ESPCI 2009, PC

Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $n^k z^n$.