Colles Calcul différentiel

PIANKO Yanis

Prépa Moulay Idriss, Fès

I Questions de cours

- Unicité de la différentielle
- Différentielle d'une application/forme bilinéaire
- Différentielle de l'inverse d'une fonction
- Différentielle de la composée
- Lien entre différentielle et dérivée partielle
- Formule de la chaîne : composition des dérivées partielles
- Définition du gradient et son expression dans une base orthonormée
- La différentielle est nulle en un point extremum
- Une fonction à différentielle nulle en un ouvert étoilé est constante, (à généraliser en exercice pour un ouvert connexe par arcs)

II Prouver la continuité de f en a

Revenir à la définition epsilonesque Montrer que si $\delta > 1$, $f(x,y) = \dfrac{|xy|^\delta}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$ est continue en $(0,0)$.

Différence entre applications composantes et applications partielles

1) Énoncer la définition d'une application composante.
2) Les applications partielles n'ont de sens que pour une application définie sur une partie de $\mathbb{R}^p$. Dans ce cas, énoncer la définition d'une application partielle.
3) Soit $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$. Étudier la continuiteé de f en $(0,0)$, et les applications partielles de f en $(0,0)$.

Remarque : On en déduit que que la continuité de chacune des applications partielles **N'IMPLIQUE PAS** la continuité de f.

III Prouver la non continuité de f en a

Tendre vers a selon une direction particulière

1) Étudier la continuité en $(0,0)$ de $f(x,y) = \dfrac{|xy|^\delta}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$ pour $\delta \leqslant 1$.
2) Étudier la continuité en $(0,0)$ de $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ pour $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$.

IV Prouver la différentiabilité

Revenir à la définition

1) Énoncer la définition de la différentiabilité d'une fonction f définie de E sur F, où E et F sont des evn de dimension quelconque.
2) Énoncer la définition de la différentiabilité d'une fonction f définie de E sur F, où E et F sont des evn de dimension finie. Quelle est la différence avec la question précédente ?

3) Trouver la différentielle d'un élement f de $\mathcal{L}(E)$.

4) Si E est euclidien, différentier $f(x) = \|x\|_E^2$.

Utiliser les dérivées partielles ($E = \mathbb{R}^p$) Trouver le plus grand ouvert sur lequel $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$ est $\mathcal{C}^1$.

V Lemme de Schwarz ($E = \mathbb{R}^p$)

Soit f de $\mathbb{R}^2$ dans R définie par : si $x \neq -y, f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x+y}$ et $f(^x, -x) = 0$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on en conclure ?

VI Déterminer les extrema

On s'intéresse à des fonctions définies sur $E = \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Déterminer les extrema globaux de $f(x,y) = x^2(x+1) + y^3$.

VII Equation aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$

On recherche des solutions de classe $\mathcal{C}^1$.

Centrale 2014 Résoudre sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + y$. On utilisera le changement de variable $\left(u, v + \dfrac{u^2}{2}\right) = (x,y)$.

Centrale 2014

1) Résoudre $(\star)$: $4\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On utilisera le changement de variable $(u,v) = (x+2y, x-2y)$.

2) Existe-t-il une solution f de $(\star)$ telle que : $\forall y, \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$ et $\forall x, f(x,0) = x^2$?

VIII Exercices d'oraux

Exercice 1 : *** *X 2011*
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|f(x) - f(y)\| \geqslant \|x - y\|$. Montrer que f est bijective.

Exercice 2 : *** *Ens 2013*

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré 3, tel que $P(0) = 0$. Montrer que $P(1) + P(j) + P(j^2) = 3$.

2) Soient A, B et C trois points distincts du plan, $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon $R > 0$, $M_1M_2M_3$ un triangle équilatéral inscrit dans le cercle. Montrer que l'un des sommets S du triangle vérifie : $SA \times SB \times SC \geqslant R^3$.

Exercice 3 : *X 2016*
Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x^3 - 2x\}$.

1) Tracer D.
2) Soient A et B deux points distincts de D d'abscissses $\leqslant 0$. Discuter le nombre de points d'intersection entre le droite (AB) et D.

Exercice 4 : *Centrale 2016*
On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient $A = (-1,0,1)$, $B = (3,1,0)\,, \vec{u} = (2,1,0)\,, \vec{v} = (1,1,1)$.

1) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et de la droite Δ passant par B et dirigée par $\vec{v}$.
2) Justifier l'existence et déterminer la distance entre D et $Delta$.

Exercice 5 : ** *Ens 2017*
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient N une norme sur $\mathbb{R}^n$, $a > 0$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
On suppose que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geqslant a\mathbb{N}x - y^2$. Montrer que : $\lim\limits_{N(x) \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 6 : ** *Ens 2017*
Soit $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 \leqslant t \leqslant y$.
Montrer que $|f(x(t))| - f(x(y)) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_t^y \left(\|x'(u)\|^2 + \|\nabla f(x(u))\|^2\right) du$. À quelle condition à-t-on égalité ?