Colles: Séries

PIANKO Yanis

Comparaison série intégrale

Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, positive, et décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, il y a équivalence entre la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt$$

-qui exprime l'intégrabilité de f- et celle de la série $\sum f(n)$.

1.1 : Nécessité de la décroissance

Trouver une fonction f définie et positive sur $[0, +\infty[$, qui n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ alors que $\sum f(n)$ converge.

1.2 : Nécessité de la décroissance bis

Trouver une fonction f définie, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ pour laquelle la série $\sum f(n)$ diverge.

Modification de l'ordre des termes

Il s'agit de remplacer par la suite (v_n) de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Pour une série à termes positifs, on ne change ni la nature ni la somme éventuelle de la série.
Pour une série à termes quelconques, ce résultat reste vrai si la série est absolument convergente.

2.1 : Modification de la somme

On s'intéresse à la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, de terme général u_n. Trouver la somme de cette série, puis trouver φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\varphi(n)}$ soit convergente mais ait une somme différente.

Indication : Prouver $H_n = \sum_1^n \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, où $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$, puis exprimer S_{2n} en fonction de H_n.

Poser la série de somme partielles V_n et de terme général v_n, tel que $v_1 = 1, v_2 = \frac{1}{3}, v_3 = -\frac{1}{2}, v_4 = \frac{1}{5}, v_5 = \frac{1}{7}, v_6 = -\frac{1}{4}$, et ainsi de suite en alternant deux termes positifs et un négatif. Puis calculer V_{3n} en fonction de H_n.

2.2 : Modification de la nature convergente ou divergente

On s'intéresse à la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, de terme général u_n. Trouver la somme de cette série, puis trouver φ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\varphi(n)}$ soit divergente..

Indication : Prouver $H_n = \sum_1^n \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, où $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$, puis exprimer S_{2n} en fonction de H_n.

Poser la série de somme partielles R_n *et de terme général* r_n*, tel que* $r_1 = 1, r_2 = -\frac{1}{2}, r_3 = \frac{1}{3}, r_4 = \frac{1}{5}, r_5 = -\frac{1}{4}, r_6 = \frac{1}{7}, r_7 = \frac{1}{9}, r_8 = \frac{1}{11}, r_9 = -\frac{1}{6}$*, et ainsi de suite en faisant suivre le* $n^{me} terme négatif par n+1 termes positifs$. *Poser*$\varphi(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\theta(n) = \varphi(n) + n = \varphi(n+1) - 1$*, rang du* n^{me} *terme négatif. Poser la suite extraite* $T_n = R_{\theta(n)}$*, et en s'aidant de* $T_n = T_1 + \sum_{1}^{n-1} T_{k+1} - T_k$*, montrer que* (T_n) *diverge.*

Autres types de convergence

Euler considère que la série de terme général $(-1)^n$ *converge et que sa somme est égale à* $\frac{1}{2}$*. De nombreux mathématiciens se sont intéressés à des types de convergence plus large que la convergence conventionnelle pour donner un sens à la somme de certaines séries.*

— *Une série* $\sum u_n$ *converge au sens de Césàro si la suite* (S_n) *des sommes partielles de* $\sum u_n$ *converge au sens de Césàro, ce qui signifie que la suite* (T_n)*, de terme général :*

$$T_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n},$$

converge dans $\mathbb{R}$ *au sens habituel et, dans ce cas, la limite « ordinaire »de la suite* (T_n) *s'appelle la somme au sens de Césàro de la série* $\sum u_n$*.*

— *On dit d'une série* $\sum u_n$ *qu'elle converge au sens d'Abel si le rayon de convergence de la série entière* $\sum u_n x^n$ *est au moins égal à* 1 *et si la fonction :*

$$f \ : \ x \mapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n,$$

définie sur l'intervalle $]-1, 1[$*, admet une limite finie* ℓ *quand* x *tend vers* 1 *par valeurs inférieurs et, si la série* $\sum u_n$ *converge au sens d'Abel, sa somme au sens d'Abel est le nombre réel* $\ell = \lim_{x \to 1^-} f(x)$*.*

— *On dit d'une série* $\sum u_n$ *qu'elle converge au sens de Borel si, pour tout nombre réel* $x \geqslant 0$*, la série :*

$$\sum \frac{u_n}{n!} x^n e^{-x}$$

converge et si, pour la fonction S *définie sur l'intervalle* $[0, +\infty[$ *par :*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n e^{-x},$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x)dx$ *est convergente.*

Si la série $\sum u_n$ *converge au sens de Borel, sa somme au sens de Borel est le nombre réel :*

$$B = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n e^{-x} dx.$$

3.1 : Césàro

Prouver l'une des deux implications entre les deux types de convergence (conventionnelle et de Césàro). Trouver un contre-exemple pour l'autre implication.

3.2 : Abel

On démontre que si la série $\sum u_n$ converge au sens de Césàro, elle converge au sens d'Abel et qu'alors les sommes sont les mêmes pour les deux types de convergence. Montrer, en utilisant la série de terme général $u_n = (-1)^{n+1}n(n+1)$, que la réciproque est fausse.

3.3 : Borel

On démontre que si la série $\sum u_n$ converge au sens d'Abel, elle converge au sens de Borel et qu'alors les sommes sont les mêmes pour les deux types de convergence. Montrer, en utilisant la série de terme général $u_n = (-1)^n a^n$, où a un nombre réel supérieur strictement à 1, que la réciproque est fausse.