TD et Fiche de révision: champ électromoteur

PIANKO Yanis

Prépa Moulay Idriss, Fès

I Démonstrations, Explications

1) Démo dans le cas général

Quand on déplace un circuit fermé, dans un champ magnétique variable, il existe un champ éléctrique nommé électromoteur $\vec{E_m}$ dont la circulation le long du conducteur est égale à la f.e.m induite. On a :

$$e_{ind} = \oint_{\text{circuit}} \vec{E_m}.\vec{dl} \text{ avec } \quad \vec{E_m} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur du champ $\vec{B}$.

Attention, ce résultat est très pratique mais Hors-Programme, donc à savoir démontrer et surtout à comprendre plutôt qu'à connaître.

Preuve : D'après les équations de Maxwell, div $\vec{B} = 0$, donc il existe $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{A}$. D'autres part, rot$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. D'où $\vec{\text{rot}}(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$, il existe un potentiel V tel que $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\text{grad}}V$. Aussi, en appliquant le PFD à un electron de masse m, on a

$$\vec{0} \approx -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - m\frac{\vec{\omega}}{\tau}$$

où on néglige les forces d'inerties, $\vec{v}$ vitesse du conducteur dans un réféntiel galiléen, $\vec{\omega}$ vitesse de l'électron par rapport au conducteur, et $\vec{u} = \vec{v} + \vec{\omega} \approx \vec{v}$. Il suffit d'exprimer $\vec{\omega}$ en fonction de $\vec{j}$, en remarquant que

$$\vec{j} = \sum n_i q_i \vec{v_i} = -n_e e\vec{u} + n_e e\vec{v} = -n_e e\vec{\omega}$$

On obtient finalement $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, ce qui donne dans le cas le plus général :

$$e_{ind} = Ri_{ind} = \oint_{\text{circuit}} \frac{1}{\gamma}\vec{j}.\vec{dl} = \oint_{\text{circuit}} -\vec{\text{grad}}V.\vec{dl} + \oint_{\text{circuit}} (-\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl}$$

Remarque : on utilise ici la résistance filiforme (expression à connaître par coeur) :

$$\begin{cases} i_{ind} = j(P)s(P) \\ \delta R = \frac{1}{\gamma}\frac{\delta \ell_P}{s(P)} \\ Ri = \oint_{\text{circuit}} \frac{1}{\gamma}\frac{\delta \ell_P}{s(P)}\vec{j}(P).\vec{n}s(P) = \oint_{\text{circuit}} \frac{\vec{j}(P).\vec{dl}}{\gamma} \end{cases}$$

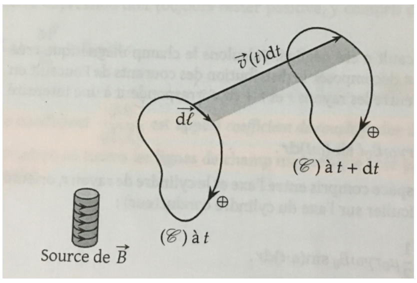
Or, la circulation du gradiant sur un circuit fermé est nulle, d'où $e_{ind} = \oint_{\text{circuit}} (-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl}$, ce qui prouve l'expression du champ électromoteur.

— Pour l'induction de Lorrentz, cette formule devient $\vec{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ (même démo avec le champ stationnaire).

— Pour l'induction de Neumann, cette formule devient $\vec{E_m} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

2) Démo plus directe dans le cas d'induction de Lorentz

On comprend mieux physiquement ce qu'il se passe...



Le conducteur $\mathcal{C}$ est **mobile** dans un référentiel d'étude $\mathcal{R}$ où le champ magnétique $\vec{B}$ est **stationnaire**.
On considère un circuit filiforme $\mathcal{C}$ animé d'une vitesse $\vec{v}(t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Aux instants t et $t+\mathrm{d}t$, le conducteur $\mathcal{C}$ occupe deux positions différentes. Le champ magnétique est stationnaire dans le référentiel $\mathcal{R}$, mais pas nécessairement uniforme. Il en résulte que, le champ magnétique prenant des valeurs différentes aux deux positions considérées du conducteur $(\mathcal{C})$, le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers $(\mathcal{C})$ varie entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$. Cette variation est donc seulement due au fait que le conducteur $(\mathcal{C})$, animé d'un mouvement à la vitesse $\vec{v}(t)$ dans $\mathcal{R}$, explore des régions où le champ magnétique $\vec{B}$ prend des valeur différentes.
Dans le référentiel $\mathcal{R}'$ liée au conducteur $(\mathcal{C})$, le champ magnétique $\vec{B'}(t)$ apparaît variable dans le temps et la variation de son flux à travers $(\mathcal{C})$ donne naissance à une force électromotrice selon la loi de faraday.

À un instant t, le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers le circuit $(\mathcal{C})$ peut-être défini comme suit :

$$\Phi(t) = \iint_{P \in \mathcal{S}(t)} \vec{B}(P).\vec{n}(t)\mathrm{d}S,$$

où $\mathcal{S}(t)$ est une surface qui s'appuie sur $(\mathcal{C})$ à l'instant t et où la normale $\vec{n}(t)$ est orientée conformément à l'orientation retenue pour $(\mathcal{C})$. On considère maintenant la surface fermée constituée de $\mathcal{S}(t)$, de $\mathcal{S}(t+\mathrm{d}t)$ et de la surface latérale (dont seul un élément de surface apparaît grisé sur la figure ci-dessus). Le flux sortant du champ magnétique à travers cette surface fermée est nulle. Ce flux sortant s'écrit en fonction des flux $\Phi(t), \Phi(t+\mathrm{d}t)$ et du flux $\mathrm{d}\Phi_{lat}$ à travers la surface latérale comme suit :

$$\Phi_{\text{sortant}} = -\Phi(t) + \mathrm{d}\Phi_{lat} + \Phi(t+\mathrm{d}t) = 0$$

avec $\mathrm{d}\Phi_{lat} = \iint_{P \in \mathcal{S}} \vec{B} \cdot \vec{n_{lat}}\mathrm{d}S_{lat}$. On en déduit la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\Phi_{lat} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{lat}}{\mathrm{d}t}.$$

Pour calculer la variation du flux à travers $(\mathcal{C})$, il suffit donc de calculer $\mathrm{d}\Phi_{lat}$. On remarque que $\vec{n_{lat}}\mathrm{d}S_{lat} = \vec{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{v}(t)\mathrm{d}t$, de sorte que :

$$\mathrm{d}\Phi_{lat} = \iint_{P \in \mathcal{S}_{lat}} \vec{B} \cdot \vec{n_{lat}}\mathrm{d}S_{lat} = \mathrm{d}t \oint_{M \in \mathcal{C}(t)} \vec{B} \cdot \left(\vec{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{v}(t)\right) = \mathrm{d}t \oint_{M \in \mathcal{C}(t)} \left(\vec{v}(t) \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}.$$

On obtient en fin de compte :

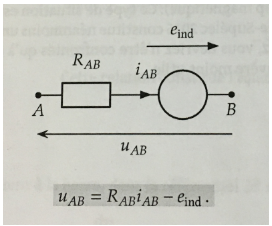
$$\boxed{e_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint_{M \in \mathcal{C}(t)} \left(\vec{v}(t) \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{\mathrm{d}\ell}}$$

La force électromotrice induite apparaît sous la forme de la circulation du champ de vecteur $\vec{v}(M,t) \wedge \vec{B}(M)$ (on utilise maintenant la vitesse locale $\vec{v}(M,t)$ du conducteur $(\mathcal{C}(t))$ car les résultats établis restent valables même si le conducteur se déforme pendant son mouvement). Ce champ vectoriel est homogène à un champ électrique. On le nomme *champ électromoteur de Lorentz* et on le note $\vec{E_m}(M,t)$:

$$\vec{E_m}(M,t) = \vec{v}(M,t) \wedge \vec{B}(M)$$

Attention, la notion de champ électromoteur est hors-programme. Il faut donc savoir faire les démonstrations. Ce vecteur est défini localement, et n'est non nul que dans les portions du conducteur qui sont en mouvement dans le champ magnétique : c'est dans ces portions que prendra naissance la force électromotrice induite.

Le champ électromoteur est à circulation non conservative puisque sa circulation sur un contour fermé n'est pas nulle, mais égale à la force électromotrice induite. Cela signifie qu'une charge peut gagner de l'énergie sous l'influence de ce champ électromoteur. Aussi, dans une portion d'un conducteur filiforme en mouvement dans un champ magnétique stationnaire, on montre (La justification de ces relations nécessite d'effectuer un changement de référentiel galiléen du champ électromagnétique dans la limite magnétique de l'ARQS) qu'on peut représenter l'action du champ électromoteur sous la forme d'une force électromotrice induite. Si, en outre, le conducteur considéré possède une résistance électrique R_{AB}, le modèle équivalent est le suivant :



Attention, dans le schḿa électrique équivalent, il faut orienter la force Íectromotrice induite et le courant induit **dans le même sens**.

3) Flux coupé

Dans le cas de l'induction de Lorentz, cette notion est féconde. Elle permet d'utiliser le flux coupé de façon très puissante et efficace. **Remarque :** Le flux coupé est aussi une notion hors programme. J'en reparle ici pour que vous ne soyez pas déstabilisé si elle tombe néanmoins dans un exercice d'oral (très peu probable à l'écrit). Il faudra manipuler le champ électromoteur (démonstartion rapide), puis le flux coupé (démo rapide).

On considère un circuit filiforme dans un champ $\vec{B}$. En un point M du circuit, on envisage un élément de circuit caractérisé par le vecteur $\mathrm{d}\vec{\ell}$ (sens déterminé par le courant). Le circuit est parcouru par un courant variable $i(t)$. À l'instant t_0, l'élément de circuit subit la force de Laplace

$$\delta\vec{F} = i(t_0)\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}(M, t_0).$$

Donc, le travail correspondant au déplacement pendant dt $\delta\vec{d} = \vec{v}dt$ est $\delta W = i(t_0)\vec{B}(M, t_0).(\delta\vec{d} \wedge \mathrm{d}\vec{\ell})$ (en utilisant $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a})$) Le vecteur surface associé à l'aire balayée pendant dt est $\delta\vec{s} = \delta\vec{d} \wedge \mathrm{d}\vec{\ell}$. On pose le flux

$$\delta\varphi_c = \vec{B}(M, t_0).\delta\vec{s},$$

qui est le flux coupé par le circuit pendant dt. (On peut trouver les grandeurs utiles avec les formules $\delta W = F_x dx$ et $\delta W = M_\Delta d\theta$).

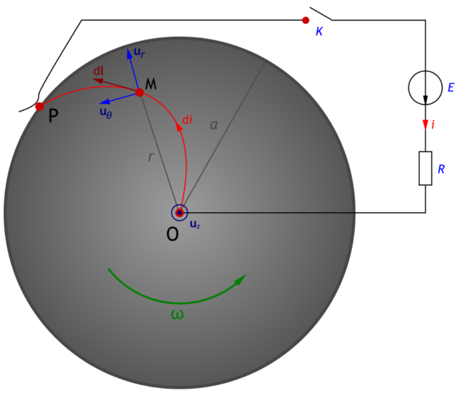
Dans le cas de l'induction de Lorentz, on peut, en utilisant $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a})$, trouver

$$\boxed{e_{ind} = -\oint_{\text{circuit}} \vec{B}.\vec{v} \wedge \vec{dl} = -\frac{\delta\varphi_c}{dt}}$$

II Applications

Voici le genre d'exercices qui peut tomber lors d'un oral, et qui nécessite la notion de champ électromoteur.

Roue de Barlow



On considère le montage de la roue de Barlow. Il s'agit d'un disque de métal de centre O et de rayon a pouvant pivoter autour de son axe (O_z). On connecte entre O et un point P fixe faisant contact avec la roue (historiquement la roue plongeait dans un bain de mercure pour établir le contact) un générateur de force électromotrice E, une résistance R et un interrupteur K. On suppose :

— le disque et les fils parfaitement conducteurs

— l'inductance propre du circuit négligeable

Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\ \vec{u}_z$. On note :

— ω la vitesse angulaire de la roue

— i le courant électrique passant dans le circuit

— $J = \dfrac{1}{2}ma^2$ le moment d'inertie du disque par rapport à (O_z)

Question : À l'instant $t = 0$, on ferme K. Trouver l'évolution de ω en fonction de t.

Correction

Le courant qui arrive en O se répartit sur toute la roue car le matériau est conducteur, mais repart par un point unique, le point P. Il faut donc considérer toutes les lignes élémentaires de courant $\mathrm{d}i$ qui partent de O, parcourent la roue et arrivent en P. On en a dessuné une en rouge sur le schéma.

1) On va d'abord considérer une ligne élémentaire de courant d'intensité $\mathrm{d}i$ qui part de O et arrive en P, calculer l'action des forces de Laplace sur cette ligne de courant, et intégrer sur les lignes de courant.
   - Soit M un point de cette ligne de courant, muni d'un repère polaire (u_r, u_θ).
   - La portion infinitésimale $\mathrm{d}\vec{\ell}$ de la ligne de courant en M est soumise à la force de Laplace $\mathrm{d}^2\vec{F} = \mathrm{d}i\ \mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.
   - On exprime $\mathrm{d}\vec{\ell}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$: $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\ \vec{u}_r + r\ \mathrm{d}\theta\ \vec{u}_\theta$.
   La force de Laplace devient alors $\mathrm{d}^2\vec{F} = B\ \mathrm{d}i(- \mathrm{d}r\ \vec{u}_\theta + r\ \mathrm{d}\theta\ \vec{u}_r)$.
   - On s'intéresse en réalité au moment par rapport à (O_z) des forces de Laplace pour exprimer la mise en rotation de la roue. Le moment par rapport à (O_z) des forces de Laplace qui s'exercent en M vaut $\mathrm{d}^2\vec{\Gamma} = \overrightarrow{OM} \wedge d^2\vec{F} = -Br\ \mathrm{d}i\ \mathrm{d}r\ \vec{u}_z$.
   - On intègre alors l'expression par rapport à r pour trouver le moment par rapport à (O_z) des forces de Laplace qui s'exercent sur toute la ligne de courant : $\mathrm{d}\vec{\Gamma} = \displaystyle\int_{r=0}^{r=a} -Br\ \mathrm{d}i\ \mathrm{d}r\ \vec{u}_z = -B\frac{a^2}{2}\ \mathrm{d}i\ \vec{u}_z$.
   - Enfin, on intègre sur toutes les lignes de courant, c'est-à-dire par rapport à i :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = -B\frac{a^2}{2}i\vec{u}_z}$$

2) Le disque est un conducteur en mouvement dans un champ magnétique. Tout point est alors siège d'un champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$. On tient alors le même raisonnement pour calculer la force électromotrice totale induite :
   - Soit une ligne élémentaire de courant orientée de O vers P. Soit M un point de cette ligne de courant, muni d'un repère polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
   - M est le siège d'un champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$.
   - On exprime $\mathrm{d}\vec{\ell}$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:
   $$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\ \vec{u}_r + r\ \mathrm{d}\theta\ \vec{u}_\theta$$
   - On calcule la force électromotrice induite le long de cette ligne de courant :
   $$e = \int_{r=0}^{r=a} \vec{E}_m.\mathrm{d}\vec{l} = \int_{r=0}^{r=a} rB\dot{\theta}\ \mathrm{d}r = \frac{a^2}{2}B\dot{\theta}$$
   D'où
   $$\boxed{e = \frac{a^2}{2}B\omega}$$

3) On applique le principe fondamental de la dynamique au disque : $\sum \vec{\Gamma}.\tilde{\mathrm{u}}_z = J\ \dot{\omega}$
   - On obtient ainsi l'équation
   $$-Bi = m\dot{\omega}$$
   - D'après la loi d'Ohm :
   $$i = \frac{e+E}{R}$$
   - Après remplacement : $m\dot{\omega} = -\dfrac{B}{R}\left(\dfrac{a^2}{2}B\omega + E\right)$.
   - Donc ω vérifie l'équation différentielle $\dot{\omega} + \dfrac{B^2a^2}{2mR}\omega = -\dfrac{BE}{mR}$.
   - Après résolution : $\omega = -\dfrac{2E}{Ba^2}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{B^2a^2}{2Rm}t\right)\right)$