Révisions sur la dualité

6 décembre 2018

Première partie
Présentation

1 Formes linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une forme linéaire sur E est une application $l : E \to \mathbb{K}$.
Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Par théorème du rang, si $\dim E = n$ et que H est un hyperplan de E, alors $\dim H = n - 1$.
On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, appelé dual de E.

2 Base duale

Soit l une forme linéaire non nulle.
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.
La famille $(e_1^*, ..., e_n^*)$ de E^* où $\forall i, j \in [|1, n|], e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, appelée base duale de $(e_1, ..., e_n)$, est une base de E^*.
$(e_1^*, ..., e_n^*)$ est la base antéduale de $(e_1^*, ..., e_n^*)$.
Considérons l'application $\phi \in \mathcal{L}(E, E^*)$ qui à la base $(e_1^*, ..., e_n^*)$ associe sa base duale. Montrer que l'application ϕ dépend de la base choisie.

3 Bidual

Considérons l'application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(E, E^{**})$ qui à une base de E associe sa base biduale (base duale de la base duale) dans E^{**}.
Montrer que cette application ne dépend pas de la base de E choisie.
En déduire qu'il existe une bijection naturelle entre E et son bidual E^{**}.

Deuxième partie
Applications

On considère E un espace vectoriel de dimension n.

4 Préliminaires

Soit $(\ell_1, ..., \ell_p)$ une famille de formes linéaires sur E et $\Phi : E \to \mathbb{K}^p$ définie par $x \mapsto l_1(x), ..., l_p(x)$.
Montrer que $(\ell_1, ..., \ell_p)$ est libre $\Leftrightarrow \Phi$ est surjective.
Montrer que $(\ell_1, ..., \ell_p)$ est une base de $E^* \Leftrightarrow \Phi$ est bijective.
On pose $F = \{x \in E | \forall i \in [|1, p|], \ \ell_i(x) = 0\}$. Montrer que $\dim F = n - p$.

5 Multiplicateurs de Lagrange

Soit $(\ell_1, ..., \ell_p)$ une famille de formes linéaires et ℓ une forme linéaire. Montrer que :

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Ker}(\ell_i) \subset \mathrm{Ker}(\ell) \Leftrightarrow \ell \in Vect(\ell_1, ..., \ell_p)$$

6 Equations de sous-espaces

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. Soit $A = (a_{ij})_{1 \ \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ une matrice de rang p.
Montrer que l'ensemble des $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ tels que $\forall i \in [|1, p|]$, $a_{i1} x_1 + ... + a_{in} x_n = 0$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - p$.
Inversement, montrer qu'un sous-espace de dimension k possède $n - k$ équations cartésiennes indépendantes.

7 Transposée

Soient e et e' deux bases de E, ainsi que e^* et e'^* leurs bases duales respectives. On note P la matrice de passage de e à e'. Montrer que la matrice de passage de e^* à e'^* est égale à ${}^tP^{-1}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans la base e. On note u^* l'endomorphisme de E^*, appelé transposé de u, tel que : $\forall \ell \in E^*$, $u^*(\ell) = \ell \circ u$.
Vérifier que la matrice de u^* dans la base e^* (base duale de e) est ${}^tA$.
En déduire que la transposition est linéaire et que,
$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Troisième partie

Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Quelle forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ connaissez-vous ?
2. Soit φ forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\, \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer que φ est proportionnelle à la trace.
3. Soit φ forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\exists! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\, \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM).$$

4. Soit φ forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\, \varphi(ABC) = \varphi(CBA).$$

Montrer que $\varphi = 0$.
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\mathrm{tr}(M) = 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 | M = AB - BA.$$

Indications : Commencer par montrer le résultat pour M de diagonale nulle en cherchant A sous forme diagonale, puis montrer que si $tr(M) = 0$ alors M est semblable à une matrice de diagonale nulle.
6. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient des matrices inversibles.

Quatrième partie

Transvections et dilatations

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E tel que $rg(u - \mathbb{I}) = 1$.
1. Justifier l'existence d'un vecteur a non nul et d'une forme linéaire ℓ non nulle tels que $\forall x \in E,\, u(x) = x + \ell(x)a$. Que vaut $\det u$?
2. On suppose $\ell(a) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. u est appelé une transvection.
3. On suppose $\ell(a) = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$. u est appelé une dilatation.
4. Montrer que le groupe spécial linéaire est engendré par les transvections, puis que le groupe linéaire est engendré par les transvections et dilatations.