Familles sommables

PIANKO Yanis

I Ensembles dénombrables

Exercice 1.1 :

Soit f une surjection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble E. Montrer que E est au plus dénombrable.

Exercice 1.2 :

Montrer que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est dénombrable.

Exercice 1.3 :

Si on enlève une partie finie à un ensemble dénombrable, on obtient un ensemble dénombrable. Préciser cet énoncer et le prouver.

Exercice 1.4 :

On considère l'application Φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par : $\Phi(n) = (-1)^n \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$. Montrer que Φ est une bijection et préciser la bijection réciproque. Retrouver le fait que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Exercice 1.5 :

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante telle que $u_0 = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} +\infty$. Montrer que, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant m \leqslant u_{n+1}$.
2) On pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$, et on définit l'application f de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ par $f(p,q) = a_{p+q} + q$. En utilisant f, retrouver le fait que N^2 est dénombrable.

Exercice 1.6 :

Le but de l'exercice est de démontrer que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable.

1) On suppose l'existence d'une bijection f de $\mathbb{N}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. On note $A = \{n \in \mathbb{N}/n \notin f(n)\}$. En introduisant l'antécédant q de A, aboutir à une contradiction. En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.
2) En déduire que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.7 : **

1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2) Montrer que l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.
3) Montrer que l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est fini est dénombrable.
4) En déduire que l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire est infini est infini non dénombrable.

Exercice 1.8 :

Montrer que l'ensemble E des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 1.9 :

Prouver qu'un ensemble I est au plus dénombrable si et seulement s'il existe une suite croissante (J_n) de parties finies de I dont la réunion est égale à I.

Problème : Théorème de Cantor-Bernstein-Schröder

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein-Schröder :
Soient E et F deux ensembles. S'il existe des injections de E dans F et de F dans E, alors E et F sont équipotents.
Rappel : On dit que deux ensembles sont équipotents s'il existe une bijection d'un ensemble vers l'autre.

1) Soit $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ croissante pour l'inclusion, i.e telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \subset B \Rightarrow \phi(A) \subset \phi(B)$$

On pose $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{P}(E); A \subset \phi(A)\}$.

(a) Vérifier que $\mathcal{D}$ est non vide.

(b) On pose $A_0 := \bigcup_{A \in \mathcal{D}} A$. Montrer que $A_0 \in \mathcal{D}$.

(c) Établir que A_0 est un point fixe de ϕ.

2) Soient E et F des ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des injections.

(a) Montrer que l'application $X \mapsto E \backslash g(F \backslash f(X))$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même est croissante pour l'inclusion.

(b) Établir l'existence d'une bijection de E sur F.
Question difficile

3) Un ensemble est dit dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$. Le théorème de Cantor-Bernstein- Schröder permet de prouver qu'un ensemble E est dénombrable en se contentant de trouver des injections de E dans $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{N}$ dans E.

(a) Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable et en déduire que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sont équipotents.

(b) Établir que $(n, m) \mapsto 2^n 3^m$, définie de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, est injective. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

(c) En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

II Sommes doubles :

Exercice 2.1 :

Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $u_{n,p} = 0$ sinon.

1) Pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que la famille $(u_{n,p})_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et calculer sa somme S_p.
2) En déduire que la famille $(u_{n,p})_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Exercice 2.2 :

Soit $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double à termes dans $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} u_{p,q} \leqslant M$. Montrer que la famille $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et que la suite $\left(\sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} up, q \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers sa somme.