Transformation d'Abel

PIANKO Yanis

Ce DL est un DL de niveau 1. Il faut absolument maîtriser ce dont il parle, et donc y revenir régulièrement. Quelques rappels :

— On dit qu'une fonction f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$.

— La valeur moyenne d'une fonction T-périodique f est $\displaystyle\frac{1}{T}\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t$, avec $[x, x+T]$ dans l'ensemble de définition.

I Intégration par parties

Soient f et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

1) On suppose que f est bornée, que g est de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et convergent vers 0 en $+\infty$. Elle est donc positive.
   (a) Montrer que g' est intégrable sur $[a, +\infty[$. En déduire que Fg' aussi.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ existe.
2) Montrer que l'hypothèse F bornée est vérifiée notamment dans les deux cas suivants :
   (a) f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
   (b) f est périodique de période T et de moyenne nulle. (On montrera d'abord que F est T-périodique.)
3) Justifier que $\forall \alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ existe.
4) On suppose f est périodique de période T : Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ existe ssi f est de moyenne nulle.
   Indication : On pourra poser $f(t) = m + g(t)$, où $m = \displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t$ et utiliser les questions précédentes.

II Transformation d'Abel

Elle représente l'équivalent pour les sommes de l'intégration par parties pour les intégrales.
Soient (a_n) et (u_n) deux suites de nombres complexes. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, A_n = \displaystyle\sum_0^n a_n$.

5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k u_k = u_n A_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k\,(u_{k+1} - u_k)$.
6) Règle d'Abel :
   On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle, décroissante et converge vers 0. En s'aidant de la question précédente, montrer que la série $\sum a_n u_n$ converge.
7) En posant une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astucieuse, retrouver la règle du critère spécial des séries alternées.
8) Application : Soient $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$. Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge. En déduire que les séries $\displaystyle\sum \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum \frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ convergent.
   Remarque : Lorsque $\theta = \pi$ modulo 2π, on retrouve le CSSA. Si $\theta = 0$ modulo 2π, on retrouve les séries de Riemann : la série converge ssi $\alpha > 1$.