TD polynôme minimal

PIANKO Yanis

Prépa Moulay Idriss, Fès

I Exercices d'application :

Exercice 1.1 : Matrices d'orde 3

Soient a, b et c trois éléments distincts de $\mathbb{C}$. Déterminer le polynôme minimal des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

20 minutes

Exercice 1.2 : Propriété d'un endomorphisme dont on connaît le polynôme minimal

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de type fini, de polynôme minimal $X^5 - X^2 - X + 2$. Justifier l'existence de deux polynômes A et B de degré au plus 1 tels que $f^5 = A(f) \circ B(f)$.
5 minutes

Exercice 1.3 : Endomorphisme involutif

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et g un endomorphisme diagonalisable de E. On suppose qu'il existe un entier $m \geqslant 3$ tel que $g^m = Id_E$. Démontrer l'égalité $g^2 = Id_E$.
15 minutes

II Exercices plus théoriques

Exercice 2.1 : Diagonalisation suivant le corps de base

1) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geqslant 1$. On suppose qu'il existe un entier naturel $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = Id_E$. Montrer que f est diagonalisable.
2) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tel que $f^2 = -Id_E$. L'endomorphisme est-il diagonalisable ? (On pourra différencier deux cas)

10 minutes

Exercice 2.2 : Sous-espace vectoriel stable dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f un endomorphisme de E et $P_{min,f}$ le polynôme minimal de f.

1) On suppose que le degré de $P_{min,f}$ est égal à 1. Que peut-on dire de f ?
2) On suppose que le degré de $P_{min,f}$ est supérieur ou égal à 2. Il existe donc un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré 2, noté $X^2 + aX + b$, qui divise $P_{min,f}$. Soit $Q(X)$ le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P_{min,f} = (X^2 + aX + b)Q(X)$.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur u de E tel que $(Q(f))(u)$ soit non nul.

(b) Soit u un élément de E tel que $v = (Q(f))(u)$ soit non nul. Montrer que le sous-espace vectoriel F engendré par v et $f(v)$ est stable par f.

3) En déduire qu'il existe un sous-espace vectoriel de E stable par f, de dimension inférieure ou égale à 2.

15 minutes

Exercice 2.3 : Diagonalisation du produit de deux endomorphismes

Soient n un entier strictement positif et E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ suivant :

$$E = \{P \in \mathbb{R}[T] \mid P = 0 \text{ ou } \deg P \leqslant n\}$$

1) Soit $P(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + \ldots + a_n T^n$ un polynôme de E. Vérifier que $T^n P\left(\frac{1}{T}\right)$ est un polynôme de E.

2) Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(P(T)) = T^n P\left(\frac{1}{T}\right)$. Calculer f^2. En déduire que f est inversible et qu'il est diagonalisable. Quel est le polynôme minimal de f ?

3) Soit D l'endomorphisme de E défini par $D(P) = P'$ où P' est le polynôme dérivé de P. Montrer que D n'est pas diagonalisable.

Le but des deux questions suivantes est de prouver dans deux cas particuliers que l'endomorphisme $D \circ f$ est diagonalisable.

4) On considère le cas $n = 3$. Calculer le polynôme caractéristique de $D \circ f$. En déduire que $D \circ f$ est diagonalisable ; quel est son polynôme minimal ?

5) On considère le cas $n = 4$. En cherchant des vecteurs propres de $D \circ f$, montrer que $D \circ f$ est diagonalisable, et déterminer son polynôme minimal.

6) À l'aide des endomorphismes précédents, construire deux endomorphismes diagonalisables dont le produit n'est pas diagonalisable.

35 minutes