Fiche de révision: Induction

PIANKO Yanis

I Actions exercées par un champs $\vec{B}$ sur un circuit

Si le champ $\vec{B}$ est uniforme

1) Calcul des forces de Laplace

On s'intéresse à des portions de courant rectilignes, parcourues par *le même courant.*
On calcule la force de Laplace élémentaire $\delta\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$ pour une distribution volumique, $\delta\vec{F} = \vec{j_s} \wedge \vec{B} dS$ pour une distribution surfacique, $\delta\vec{F} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$ pour un circuit filiforme.

Si le champ $\vec{B}$ est stationnaire

2) Flux magnétique

On s'intéresse à un circuit rigide (induction de Lorentz).
Rappel : **Théorème de Maxwell**

> Pour un circuit fermé déplacé ou déformé de façon continue, dans un champ $\vec{B}$ stationnaire, le travail élémentaire des forces de Laplace vaut $\delta W = i(t).\delta\phi$, où ϕ est le flux magnétique extérieur traversant le circuit à l'instant t.

$F_x = i(t).(\dfrac{\partial\phi}{\partial x})$ et $M_\Delta = i(t).(\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta})$.
Remarque : On peut se passer de l'hypothèse $\vec{B}$ stationnaire si on calcule à des instants t_0 particuliers.

3) Inductance mutuelle

Si on a deux circuits C_1 et C_2 *rigides* parcourus par des courants i_1 et i_2, alors $\phi_{1\to2} = M.i_1$ et $\phi_{2\to1} = M.i_2$.
Par ce qui précde, on peut alors conclure :
$F^{Laplace}_{1\to2,x} = i_1(t)i_2(t)\dfrac{\partial M}{\partial x}$ et $M^{Laplace}_{1\to2,\Delta} = i_1(t)i_2(t)\dfrac{\partial M}{\partial\theta}$.

4) Dipôle magnétique

Il faut penser à utiliser le moment magnétique d'un dipôle dès que l'on mentionne un aimant ou une petite spire. Inversement, il faut parfois réintroduire une petite spire quand on vous donne un dipôle magnétique, notamment pour certains calculs énergétiques. Cela vous permettra de calculer la mutuelle d'un système plus facilement.
Rappels : Un dipôle magnétique est un dispositif de moment magnétique non nul, suffisamment localisé dans l'espace pour que $\vec{B}$ soit considéré comme constant sur son étendue. On a $\vec{\mu} = iS\vec{n}$, où $\vec{n}$ est le vecteur résultant normal à la surface considérée. En coordonnées sphériques, il crée un champ :

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mu}{r^3}\cos\theta \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mu}{r^3}\sin\theta \quad B_\varphi = 0$$

Aussi,

$$\vec{F} = \vec{\text{grad}}(\vec{B}.\vec{\mu})_{\vec{\mu}cst}, \Gamma = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \text{et} \mathcal{E} = -\vec{B}.\vec{\mu}$$

Sans hypothèse restrictive, mais HP

5) Flux coupé

Technique utile si l'on connait la direction de la force de Laplace. On considère un circuit filiforme dans un champ $\vec{B}$. En un point M du circuit, on envisage un élément de circuit caractérisé par le vecteur $\vec{dl}$ (sens déterminé par le courant). Le circuit est parcouru par un courant variable $i(t)$. À l'instant t_0, l'élément de circuit subit la force de Laplace $\delta\vec{F} = i(t_0)\vec{dl} \wedge \vec{B}(M, t_0)$. Donc, le travail correspondant au déplacement pendant dt $\delta\vec{d} = \vec{v}dt$ est $\delta W = i(t_0)\vec{B}(M, t_0).(\delta\vec{d} \wedge \vec{dl})$ (en utilisant $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a})$) Le vecteur surface associé à l'aire balayée pendant dt est $\delta\vec{s} = \delta\vec{d} \wedge \vec{dl}$. On pose le flux $\delta\varphi_c = \vec{B}(M, t_0).\delta\vec{s}$, qui est le flux coupé par le circuit pendant dt. On trouve les grandeurs utiles avec les formules $\delta W = F_x dx$ et $\delta W = M_\Delta d\theta$.

II Déterminer e_{ind}

On rappelle les différents types d'induction :
— *L'induction de Lorentz : Conducteur mobile, champ $\vec{B}$ stationnaire.*
— *L'inductio de Neumann : Conducteur statique, champ $\vec{B}$ variable.*
— *L'induction « mixte » :Conducteur mobile, champ $\vec{B}$ variable. C'est le ca général.*

Induction de Lorentz

6) Flux coupé

On peut montrer que

$$e_{ind} = -\frac{\delta\varphi_c}{dt}$$

où $\delta\varphi_c$ est le flux coupé par le circuit pendant dt. On le montrera dans la partie sur le champ électromoteur.

6 bis) Couplage électromécanique parfait

En induction de Lorentz, la puissance mécanique perdue (ou gagné) est exactement égale à la puissance électrique gagné (ou perdue). Ainsi, $P_L + e_{ind} = 0$

Induction dans le cas général

7) La loi de Faraday

Pour un circuit se déplaçant continuement dans un champ magnétique extérieur variable, la f.e.m induite vaut

$$e_{ind} = -\frac{D\phi}{dt}$$

On remarque qu'il s'agit de la *dérivée particulaire.* Dans le cas de l'induction de Lorentz ou de Neumann, cette expression se réduit à $e_{ind} = -\dfrac{d\phi}{dt}$.

8) Champ éléctromoteur

Quand on déplace un circuit fermé, dans un champ magnétique variable, il existe un champ éléctrique nommé électromoteur $\vec{E_m}$ dont la circulation le long du conducteur est égale à la f.e.m induite. On a :

$$e_{ind} = \oint_{\text{circuit}} \vec{E_m}.\vec{dl} \text{ avec } \quad \vec{E_m} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur du champ $\vec{B}$.

Attention, ce résultat est très pratique mais Hors-Programme, donc à savoir démontrer et surtout à comprendre plutôt qu'à connaître.
Preuve : D'après les équations de Maxwell, div $\vec{B} = 0$, donc il existe $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{A}$. D'autres part,

$\text{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. D'où $\vec{\text{rot}}(\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$, il existe un potentiel V tel que $\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\text{grad}}V$. Aussi, en appliquant le PFD à un electron de masse m, on a

$$\vec{0} \approx -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - m\frac{\vec{\omega}}{\tau}$$

où on néglige les forces d'inerties, $\vec{v}$ vitesse du conducteur dans un réféntiel galiléen, $\vec{\omega}$ vitesse de l'électron par rapport au conducteur, et $\vec{u} = \vec{v} + \vec{\omega} \approx \vec{v}$. Il suffit d'exprimer $\vec{\omega}$ en fonction de $\vec{j}$, en remarquant que

$$\vec{j} = \sum n_i q_i \vec{v_i} = -n_e e\vec{u} + n_e e\vec{v} = -n_e e\vec{\omega}$$

On obtient finalement $\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, ce qui donne dans le cas le plus général :

$$e_{ind} = Ri_{ind} = \oint_{\text{circuit}} \frac{1}{\gamma}\vec{j}.\vec{dl} = \oint_{\text{circuit}} -\vec{\text{grad}}V.\vec{dl} + \oint_{\text{circuit}} (-\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl}$$

Remarque : on utilise ici la résistance filiforme (expression à connaître par coeur) :

$$\begin{cases} i_{ind} = j(P)s(P) \\ \delta R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\delta \ell_P}{s(P)} \\ Ri = \displaystyle\oint_{\text{circuit}} \frac{1}{\gamma}\frac{\delta \ell_P}{s(P)}\vec{j}(P).\vec{n}s(P) = \oint_{\text{circuit}} \frac{\vec{j}(P).\vec{dl}}{\gamma} \end{cases}$$

Or, la circulation du gradiant sur un circuit fermé est nulle, d'où $e_{ind} = \displaystyle\oint_{\text{circuit}} (-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{dl}$, ce qui prouve l'expression du champ électromoteur.

— Pour l'induction de Lorrentz, cette formule devient $\vec{E_m} = \vec{v} \wedge \vec{B}$ (même démo avec le champ stationnaire).

— Pour l'induction de Neumann, cette formule devient $\vec{E_m} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

On peut maintenant prouver, dans le cas de l'induction de Lorentz, ce qui est affirmé dans le paragraphe 7) (aussi hors-programme, mais pour comprendre vraiment le cours d'induction, il faut comprendre cela).
On utilise à nouveau $\vec{a}.(\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c} \wedge \vec{a})$ pour trouver

$$e_{ind} = -\oint_{\text{circuit}} \vec{B}.\vec{v} \wedge \vec{dl} = -\frac{\delta \varphi_c}{dt}$$

III Calculer une inductance propre

Circuit filiforme

9) Calculer l'inductance propre d'un circuit

Le circuit $\mathcal{C}$, parcouru par un courant i doit être filiforme, et avoir un géométrie suffisament simple pour qu'on soit en mesure de calculer le flux.
On revient en effet à la définition pour effectuer ce calcul, ce qui signifie qu'on calcule le flux magnétique propre (flux du champ magnétique $\vec{B}(t)$ à travers le circuit $\mathcal{C}$ lui-même). Les équations de Maxwell sont linéaires et imposent donc une relation linéaire entre le champ magnétique et sa source, le courant i. D'où :

$$\phi_p = Li(t)$$

Dans le cas général

10) Utiliser l'énergie magnétique

Rappel :

> Dès que règne un champ $\vec{B}$ ou $\vec{E}$, il existe des énergies magnétostatiques et électrostatiques de densité volumique respective $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ et $\frac{B^2}{2\mu_0}$.
> Pour un conducteur inductif, l'énergie magnétique vaut $W_m = \frac{1}{2}Li^2$.
> On peut alors exprimer l'inductance propre L du circuit comme $L = \frac{2W_m}{i^2}$.

Attention, cette expression de l'énergie magnétique n'est valable que si le conducteur est seul dans l'espace. Sinon, une inductance mutuelle entre en jeu, et modifie l'expression.
Si le conducteur est seul, on calcule son énergie magnétique grâce à l'expression précédente, et on en déduit L. C'est LA méthode à utiliser si le circuit n'est pas filiforme.

IV Problèmes énergétiques

11) Généralités

Il faut impérativement être à l'aise avec la manipulation des énergies et des thèroèmes qui repose sur cette dernière. Les expressions des denistés volumiques sont rappelées dans le paragraphe précédent. Voici certaines expressions d'énergie potentielle utiles :

- Dipole magnétique placé dans un champ $\vec{B}$ stationnaire : $E_p = -\vec{M}.\vec{B}_{ext}$
- Circuit fermé d'eplacé dans un champ magnétique stationnaire et parcouru par un courant I_0 constant : $E_p = -I_0\phi_{ext}$ (en effet, $\delta W^L = i(t)d\phi_{ext} = -d(I_0\phi_{ext})$).
- Circuit d'inductance propre L, parcouru par un courant i constant : $E_p = \frac{1}{2}Li^2$

Remarque : Pour utiliser les énergies potentielles, il faut des phénomènes indépendant du temps.

En plus de savoir les calculer, il faut être capable de trouver une position d'équilibre grâce à l'énergie potentielle (minimum), pour des champs *stationnaires*, connaître les théorèmes énergétiques, etc...

12) Petit complément

On appelle K et U respectivement l'énergie cinétique et interne du système considéré. Par le Théorème de l'énergie cinétique et le premier principe de la thermodynamique, on a :

$$\frac{d(K+U)}{dt} = P_{thermique} + P_{\text{extérieur}}$$

Dans un problème d'induction, on peut souvent se ramener au résultat que l'on va énoncer pour le rail de Laplace :

- système : {barre + sources du champ} : $\frac{d(K+U)}{dt} = P_{thermique} + 0$
- système : {barre} : $\frac{d(K+U)}{dt} = P_{ext} = P^L = -e_{ind}i = -Ri^2$
- D'où $P_{ther} = \frac{dU}{dt} - Ri^2$. Il n'y a jamais d'élévation de température (sauf cas très exceptionnel, et cela sera précisé dans l'énoncé) d'où $P_{ther} = -Ri^2$.

Ce résultat important étant établi, on peut s'intéresser à l'énergie magnétostatique d'un ensemble de n circuits filiformes et immobiles, qui n'est pas la somme des énergies propres (l'inductance mutuelle entre en jeu).

$$W_{\text{m tot}} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} i_k\phi_k$$

On prouve ce résultat pour deux circuits, on peut facilement généraliser.

Faire schéma avec deux circuits, chacun avec résistance, bobine, générateur

Premier principe, appliqué à l'ensemble des deux circuits, à l'exception des deux sources E_1 et E_2 :

$$\frac{dU}{dt} = P_{ther} + P_{ext}$$

et on sait, grâce à ce qui a été fait précédemment que

$$P_{ther} = -(R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2)$$

La puissance extérieure est la puissance apportée par les deux sources de tension $P_{ext} = E_1 i_1 + E_2 i_2$. En utilisant la loi des mailles dans chacun des circuits, il vient $R_1 i_1 = E_1 + e_{1,ind}$ et $R_2 i_2 = E_2 + e_{2,ind}$ d'où

$$\frac{dU}{dt} = i_1 \frac{d\phi_1}{dt} + i_2 \frac{d\phi_2}{dt}, \text{ avec } \phi_1 = L_1 i_1 + M i_2,\ \phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

On obtient donc

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2)$$

Donc, $\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2$ est l'énergie magnétique du système. Les deux circuits jouant un rôle équivalent, on répartit de façon équitable l'énergie magnétique mutuelle entre les deux pour obtenir l'expression annoncée. Remarque : ce n'est pas la somme des $\frac{1}{2} L_k i_k^2$.

V Effet Hall

13) Effet Hall

expression locale de la loi d'Ohm Notons qu'en posant n le nombre d'électrons par unité de volume, on a $\vec{j} = -ne\vec{v}$ et $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$. On applique le PFD à un électron, en régime stationnaire, en négligeant $\left\|m(\vec{v}.\vec{\text{grad}})\vec{v}\right\|$ devant $e\left\|\vec{E}\right\|$:

$$\vec{0} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B_0} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

puis, en multipliant par $n \times (-e)$ et en posant la *constante de Hall* $R_H = -\frac{1}{ne}$, on obtient :

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B_0})$$

effet Hall Si on fixe une différence de tension U dans un direction $\vec{u_x}$ (c'est à dire que l'on fixe $\vec{j} = j_x \vec{u_x}$), on s'apercoît alors que le champ $\vec{E}$ n'est pas selon la direction x, mais qu'il existe une composante selon l'axe y, appelé champ de Hall : $\vec{E_y} = \vec{E_H} = -R_H \vec{j} \wedge \vec{B_0}$. Il compense la force magnétique, car $-e\vec{E_H} - e\vec{v} \wedge \vec{B_0} = \vec{0}$.

Origine Ce paragraphe est culturel, et hors programme. Cet effet Hall est en fait un phénomène relativiste et pas dû à une accumulation d'électrons.

faire schéma sur l'effet Hall, cf cours

Preuve :

$E_H = R_H j_x B_0 = R_H B_0 \frac{I}{L_z L_y}$

Gauss : $E_H.L_z.L_x = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$Q = \varepsilon_0.E_H.L_x = -\frac{\varepsilon_0 I B_0 L_x}{neL_y}$

Application numérique, avec les valeurs des distances utilisées dans l'article de Hall : $|Q| \sim e \times 10^{-4}$

On voit bien que ce n'est par l'accumulation d'électrons car la charge élémentaire est insécable.
Mais div $\vec{E_H} = \text{div}(-\vec{v} \wedge \vec{B_0}) = -\text{div}(\vec{v} \wedge \vec{B_0}) = -B_0.\vec{\text{rot}}\vec{v} + \vec{v}.\vec{\text{rot}}\vec{B_0} = \vec{v}.\vec{\text{rot}}\vec{B_0}$ car $\vec{v}$ est uniforme
D'où div $\vec{E_H} = \vec{v}.\mu_0\vec{j_0}$ (courant qui crée $\vec{B_0}$)$= (\frac{\vec{v}}{c^2}.\vec{j_0})\frac{1}{\varepsilon_0}$
On voit apparaître la relativité restreinte.

effet Hall quantique Ce sujet vraiment Hors-programme, c'est une remarque culturelle.
Champ $\vec{B} = B\vec{e_z}$. Pulsation cyclotron $\omega_c = \dfrac{eB}{m}$. Trajectoire des électrons autour de $O(0,0)$:

$$\left| \begin{array}{ll} x = r\cos\omega_c t & v_x = -r\omega_c \sin\omega_c t \\ y = r\sin\omega_c t & v_y = r\omega_c\cos\omega_c t \end{array} \right.$$

Aussi, on a :

$$\left| \begin{array}{l} \langle x\rangle = \langle y\rangle = 0, \quad \langle v_x\rangle = \langle v_y\rangle = 0 \\ \langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \dfrac{r^2}{2}, \quad \langle (v_x)^2\rangle = \langle (v_y)^2\rangle = \dfrac{r^2\omega_c^2}{2} \end{array} \right.$$

D'où les indéterminations quantique :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \dfrac{r}{\sqrt{2}} \\ \Delta v_x = \sqrt{\langle v_x^2\rangle - \langle v_x\rangle^2} = \dfrac{r\omega_c}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

D'après l'inégalité de Heisenberg, $\Delta x.\Delta p_x \geqslant \dfrac{\overline{h}}{2}$ d'où $r^2 \geqslant \dfrac{\overline{h}}{m\omega_c} = r_{min}$.
La surface πr_{min}^2 accueuille au plus deux électrons de même énergie (un spin $\uparrow$, un spin $\downarrow$). La densité d'électrons n d'un certain niveau d'énergie est égal à $\dfrac{N}{L_xL_yL_z}$, et la densité surfacique $n_s = nL_z$.
$n_s = \dfrac{2}{\pi r_{min}^2} = \dfrac{4eB}{h}$. Une analyse plus rigoureuse montre qu'en réalité, $n_s = \dfrac{eB}{h}$. Il y a i niveaux d'énergie, d'où $n_{s,tot} = i \times n_s$. On peut calculer la tension de Hall : $U_H = V_A - V_B = -\displaystyle\int_B^A \vec{E}.\vec{dl} = \int_A^B E_H dy$, d'où $U_H = \dfrac{IB}{n_s e} = \dfrac{h}{ie^2}I$.
La quantité $\dfrac{h}{e^2}$ a la dimension d'une résistance, c'est un quantum. On l'appelle R_K, constante de Von Klitzing.

$$R = \frac{R_k}{i}$$

VI Approximation des régimes stationnaires

τ : temps caractéristique d'évolution de $\vec{E}, \vec{B}$ et de leurs sources $\left\{\vec{j}, \rho\right\}$.
L : échelle caractéristique du système.
Se placer dans l'ARQS signifie que $\tau \gg \dfrac{L}{c}$.

On va mettre les équations de Maxwell sous forme adimensionnée : $\widetilde{E}, \widetilde{B}$ amplitudes caractéristiques et Z' grandeur adimensionnée.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\widetilde{E}}{L}\vec{\text{rot}}\vec{E'} = -\dfrac{\widetilde{B}}{\tau}\dfrac{\partial\vec{B'}}{\partial t'} \\ \dfrac{\widetilde{B}}{L}\vec{\text{rot}}\vec{B'} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\widetilde{E}}{\tau}\dfrac{\partial\vec{E'}}{\partial t'} \end{array} \right.$$

D'où $\vec{\text{rot}}\vec{E'} = -\dfrac{L}{c\tau} \times \dfrac{c\widetilde{B}}{\widetilde{E}}\dfrac{\partial\vec{B'}}{\partial t'}$ et $\vec{\text{rot}}\vec{B'} = \mu_0\dfrac{L}{\widetilde{B}}\vec{j} + \dfrac{L}{c\tau} \times \dfrac{\widetilde{E}}{c\widetilde{B}}\dfrac{\partial\vec{E'}}{\partial t'}$

Dans l'ARQS : $\dfrac{L}{c\tau} \longrightarrow 0$. Dans cette limite, on distingue deux régimes :

Limite magnétique de l'ARQS : $\dfrac{c\widetilde{B}}{\widetilde{E}} \gg 1$. Alors :

$$\left|\begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \\ \text{div}\vec{B} = 0 \end{array}\right.$$

Cadre théorique de l'induction (courants importants, peu de charges, solénoïdes ou bobines)

Limite électrique de l'ARQS : $\dfrac{\widetilde{E}}{c\widetilde{B}} \gg 1$. Alors :

$$\left|\begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{div}\vec{B} = 0 \\ \vec{\text{rot}}\vec{E} = 0 \\ \text{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{array}\right.$$

Courants faibles, très chargés (condensateurs...) Remarque : il n'y a pas que 2 ARQS (exemple : $c\widetilde{B} = \widetilde{E}$, étude d'un câble coaxial), mais plusieurs..

VII En résumé

Induction de Neumann

Circuit filiforme :

$$\left|\begin{array}{l} e_{ind} = -\dfrac{d\phi}{dt} \\ \text{Schéma électrique équivalent pour trouver } i \end{array}\right.$$

Courants distribués en volume :

$$\left|\begin{array}{l} \oint \vec{E}.\vec{dl} = -\dfrac{d\phi_B}{dt} \rightarrow \text{Trouver } \vec{E} \\ \vec{j} = \gamma \vec{E} (\text{courants de Foucault}) \end{array}\right.$$

Induction de Lorentz

Circuit filiforme :

$$\left|\begin{array}{l} e_{ind} = -\dfrac{d\phi}{dt} \\ \text{Schéma électrique équivalent pour trouver } i \\ \text{Equation du mouvement avec force de Laplace} \\ \text{Si la loi de Faraday ne fonctionne pas :} P_{Laplace} + e_{ind} i = 0 \\ \text{où} F_x = i(t).(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}) \text{ et } M_\Delta = i(t).(\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta}) \end{array}\right.$$

Courants en volume (Hors-programme...)

$$\left|\begin{array}{l} \text{Champ électromoteur} \vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B} \\ \vec{j} = \gamma \vec{E} \\ \text{ou flux coupé} \end{array}\right.$$

Induction mixte

Se traite de la même manière, simplement, $\dfrac{d\phi_B}{dt}$ comprend 2 termes (un lié à la vitesse, l'autre lié à $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$). On peut utiliser toutes les méthodes qui s'appliquent sans hypothèses restrictives vues plus haut.