Colles de mathématiques: suites et séries de fonctions

PIANKO Yanis

Prépa Moulay Idriss, Fès

Exercice 1 * Soient $f_0 \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et, pour $n \geqslant 1$ et $x \in [a,b]$: $f_n(x) = \int_a^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t$.

1) Montrer la convergence de la série de foctions de terme général f_n.
2) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

X 2007, Mines 2010 et 2014, Centrale 2010

Exercice 2** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x^{\lfloor \ln k \rfloor}$. Étudier la convergence de (f_n). *X 2016*

Exercice 3 ** On pose $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$.

1) Quel est le domaine de définition D_S de S et déterminer son signe sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer le signe de S'.
3) Limite, puis équivalent de S en 0, puis en $+\infty$.
4) Représentation graphique.

Mines 2014

Exercice 4 * Limite et équivalent de $I_n = n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$.

X 2012

Exercice 5 Déterminer la limite de $I_n = \int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}\mathrm{d}x$.

Centrale 2010

Exercice 6 ** Soit, pour $n \geqslant 2, I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^n + x^{-n}}}$. Justifier l'existence. Déterminer la limite de (I_n).

Mines 2013 et 2016

Exercice 7 Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n'(x)| \leqslant 1$. Montrer que f est continue.

X 2012

Exercice 8 ** On pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n + xn^2}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de S. Étudier la continuité et la monotonie de S.
2) Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to 0$.

Centrale 2007, 2008, 2009 et 2012, X 2011, Mines 2012, 2014, et 2015

Exercice 9 *** Soit, pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)^n \mathrm{d}x$. Limite et équivalent de u_n ?

Mines 2007, 2010 et 2012

Exercice 10 * Soient $a > 0$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{n^2 x^2}\right)$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Donner un équivalent de f en $+\infty$ et un équivalent de f en 0.

Mines 2009, 2010, 2013, 2014, et 2015, X 2011

Exercice 11 *** Soit a_n une suite décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On pose $u_k(x) = a_k x^k (1 - x)$.

1) Montrer que $\sum u_k$ converge simplement sur $[0, 1]$.
2) Montrer que $\sum u_k$ converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si $a_k \to 0$.
3) Montrer que $\sum u_k$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_k}{k}$ converge.

Exercice 12 *** Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} \mathrm{d}x = \ln 2$.

X 2011

Exercice 13 **

1) Soit (P_n) une suite de fonctions polynômiales convergeant uniformément sur $[0, 1]$ vers f. La fonction f est-elle nécessairement polynômiale ?
2) Soit (P_n) une suite de fonctions polynômiales convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. La fonction f est-elle nécessairement polynômiale ?

Ens 2016