Problème: Suites et séries de fonctions

PIANKO Yanis

I Suites de fonctions

Il est aisé de définir la convergence d'une suite de nombres réels, dans le sens où seule la définition qui découle de la notion de valeur absolue est féconde en mathématique. La notion d'une limite d'une suite de fonctions est plus délicate : elle peut différer selon la caractéristique que l'on veut voir conservée à la limite.
La convergence simple, dont la définition est énoncée dans votre cours, n'assure pas la conservation de propriétées topologiques intéressante par passage à la limite. On donne souvent un exemple simple de suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction discontinue en un point, voire quelque points. Ce problème se propose d'étudier la limite d'une suite de fonctions continues qui est discontinue sur un ensemble dense dans l'ensemble de définition.

I.1 Suite d'ensembles

1) Nous associons à tout entier $n \geqslant 1$ l'ensemble $A_n = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid k \in \{0, 1, \dots, 2^n\} \text{ et k impair} \right\}$.
On a en particulier $A_1 = \left\{ \frac{1}{2} \right\}, A_2 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$, et $A_3 = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \right\}$.
Montrer que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille d'ensembles deux à deux disjoints.

2) Nous posons $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et, pour tout entier $n \geqslant 1, B_n = \bigcup_{1 \leqslant p \leqslant n} A_p$. Nous notons, pour tout élément b de B, $m(b)$ l'unique entier $n \geqslant 1$ tel que $b \in A_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $1 \leqslant p, q \leqslant n$, $k \in \{0, 1, \dots, 2^p\}, \ell \in \{0, 1, \dots, 2^q\}$ tous deux impairs tels que $\frac{k}{2^p} < \frac{\ell}{2^q}$.
Montrer que
$$\frac{\ell}{2^q} - \frac{k}{2^p} \geqslant \frac{4}{2^{2n}}$$

3) En déduire que $\frac{k}{2^p} + \frac{1}{2^{2n}} < \frac{\ell}{2^q} - \frac{1}{2^{2n}}$, puis que
$$\left([b - \frac{1}{2^{2n}}, b + \frac{1}{2^{2n}}] \right)_{b \in B_n}$$
est une famille de segments deux à deux disjoints inclus dans $[0, 1]$.

I.2 Suite de fonctions

Cette étude préliminaire justifie l'existence de l'application f_n de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie ainsi :

— pour tout point b de B_n, $f_n(b - \frac{1}{2^{2n}}) = 0, f_n(b) = \frac{1}{2^{m(b)}}$, et $f_n(b + \frac{1}{2^{2n}}) = 0$. Les restrictions de f_n aux segments $[b - \frac{1}{2^{2n}}, b]$ et $[b, b + \frac{1}{2^{2n}}]$ sont affines.

— $f_n(x) = 0$ pour tout point x de $[0, 1]$ n'appartenant pas à la réunion de la famille $\left([b - \frac{1}{2^{2n}}, b + \frac{1}{2^{2n}}] \right)_{b \in B_n}$.

4) Représenter les fonctions f_1, f_2 et f_3.

5) Soit $b \in B$. Trouver $\lim_{n \to +\infty} f_n(b)$.

6) Soit $x \in [0, 1]$ tel que $x \notin B$. Trouver $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

7) En déduire la limite f de la suite de fonctions f_n pour la convergence simple.

I.3 Discontinuité

Il reste à montrer que f est discontinue en tout point de B, et que B est dense dans $[0,1]$.

8) Soit $b \in B$. Montrer que f est discontinue en b.

9) Soient u et v deux réels tels que $0 \leqslant u < v \leqslant 1$. Nous choisissons un entier n tel que $\dfrac{1}{2^n} < v - u$ et notons p la partie entière de $2^n u$. Prouver qu'il existe $b \in B$ tel que $b \in]u, v[$.
Remarque : Attention, si l'on trouve un réel dans $]0,1[$ de la forme $z = \dfrac{q}{2^n}$, il faut s'assurer que q est impair avant de conclure que $z \in B$.

II Séries de Fourier

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de période 2π et intégrable sur au moins un segment d'amplitude π. On associe à f les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de termes généraux :

$$a_n = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t \text{ et } b_n = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

On appelle série de Fourier de f la série $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n\geqslant 1} \varphi_n$, où pour tout entier $n \geqslant 1$, $\varphi_n : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \end{array} \right.$.
Pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, la somme de sa série de Fourier n'est pas nécessairement égale à f. Ce problème se propose détudier une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont la série de Fourier ne converge pas en 0.

II.1 Convergence et continuité

1) Nous considérons la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de terme général :

$$q_n : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto q_n(x) = 2\sin(2nx) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \end{array} \right. .$$

Nous admettons provisoirement l'hypothèse suivante :

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^* \text{ et si } x \in \mathbb{R}, \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leqslant \pi + 1.$$

On pose, pour tout entier $k \geqslant 1, n_k = 2^{k^3}$. Montrer que, pour tout réel x :

$$\left| \frac{1}{k^2} q_{n_k}(x) \right| \leqslant \frac{2(\pi+1)}{k^2}$$

2) Justifier l'existence et la continuité de la fonction :

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} q_{n_k}(x) \end{array} \right.$$

Montrer qu'elle est paire et 2π-périodique.

II.2 Série de Fourier de f

3) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et tout nombre réel x, $q_{n_k}(x)$ est la somme de $2n_k$ termes en $cos(px)$, où $n_k \leqslant p \leqslant 3n_k$.

4) En déduire que, pour $k, \ell \in \mathbb{N}^*$ et $k \neq \ell$, les décompositions (du type de la question précédente) de q_{n_k} et q_{n_ℓ} n'admettent aucun argument des cosinus en commun.

5) Nous posons, pour tout entier $m \geqslant 1$, $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{1}{k^2} q_{n_k}$. Montrer que c'est la série de Fourier de la fonction f.

6) Donner un équivalent de $\dfrac{1}{k^2}\left(\dfrac{1}{n_k} + \dfrac{1}{n_k - 1} + \ldots + 1\right)$. En déduire que la série de Fourier de f diverge en $x = 0$.

II.3 Preuve de l'hypothèse

Il faut montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leqslant \pi + 1$.

7) Justifier que l'on peut se ramener à montrer cette majoration sur $]0, \pi[$ seulement.

8) Soit x un point de $]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Nous notons q la partie entière de $\dfrac{\pi}{x}$. Montrer que l'inégalité demandée dans le cas où $n \leqslant q$.

9) En utilisant la même méthode que pour la question précédente, montrer que $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leqslant \pi$.

10) On suppose maintenant $q < n$. Soit $k \in \{q+1, \dots, n\}$. Nous posons $u_k = \displaystyle\sum_{p=q+1}^{k} \sin(px)$. Exprimer $\displaystyle\sum_{p=q+1}^{k} e^{ipx}$ en fonction de $\sin \dfrac{(k-q)x}{2}$, $\sin \dfrac{x}{2}$ et e^{iy}, où $y = \dfrac{k+q+1}{2}x$.

11) En déduire que $|u_k| \leqslant \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}}$.

12) Réécrire la somme $\displaystyle\sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$ en remarquant que pour tout $k \in \{q+2, \dots, n\}$, $\sin(kx) = u_k - u_{k-1}$.

En déduire que $\left|\displaystyle\sum_{k=q+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leqslant \dfrac{1}{(q+1)\sin \frac{x}{2}}$.

13) Montrer que $\dfrac{1}{(q+1)\sin \frac{x}{2}} \leqslant 1$.

14) En déduire l'inégalité demandée.