TD de mathématiques: Séries entières

PIANKO Yanis

Prépa Moulay Idriss, Fès

I Exercices d'application

Exercice 1.1 :

Montrer que la fonction $f \ : \ x \mapsto e^x \cos x$ est développable en série entière au voisinage de 0. Calculer ce développement.
Centrale 2014

Exercice 1.2 :

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{n^n}$.
Mines 2011

Exercice 1.3 :

Domaine de définition et équivalent en 1^- de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$.

Mines 2011, X 2015

Exercice 1.4 :

Soit, pour $n \in \mathbb{N}, W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \mathrm{d}t$.

1) Montrer, pour $n \geqslant 2$: $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.
2) Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{n+1} \leqslant W_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
3) Déterminer le rayon de convergence de $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} W_n x^n$.
4) Calculer la somme de cette série entière en utilisant $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + x\cos t}$.

Centrale 2013, Mines 2016

Exercice 1.5 :

Domaine de convergence et somme de $x \mapsto \sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

Mines 2013

Exercice 1.6 :

Rayon de convergence et somme de $x \mapsto \sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{x^n}{(n+2)n!}$.

Centrale 2013

Exercice 1.7 : *

Soit $f\ :\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de f.

2) Montrer $f(x) \underset{x\mapsto 1^-}{\sim} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

Mines 2010, 2013, 2016

Exercice 1.8 : *

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que la série $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 et qu'elle diverge en $x = 1$.

1) Montrer que $\sum a_n x^n \underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty$.

2) On suppose que $a_n \sim b_n$. Montrer que $\sum a_n x^n \sim \sum b_n x^n$ lorsque $x \to 1$.

3) Applications :

   (a) Déterminer un équivalent de $\sum n^k x^n$ lorsque $x \to 1$ pour $k > 0$.

   (b) Déterminer un équivalent de $\sum \sin(\frac{1}{n}) x^n$ lorsque $x \to 1$.

   (c) Déterminer un équivalent de $\sum \ln(1 + \frac{1}{n}) x^n$ lorsque $x \to 1$. En déduire un équivalent de $\sum \ln n x^n$ au voisinage de 1.

   (d) Déterminer un équivalent de $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ lorsque $x \to 1$ par deux méthodes.

4) Donner un résultat du même ordre pour deux séries entières de rayon de convergence infini (préciser les hypoyhèses).

   En déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \dfrac{x^n}{n!}$ puis de $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \dfrac{x^n}{n!}$.

X 2010, 2011, Ens 2014

Exercice 1.9 : Développement en série entière d'un quotient *

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et telle que $a_0 = 1$.

1) Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'égalité : $\left(\sum a_n z^n\right)(b_n z^n) = 1$.

2) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant A^n$ et en déduire qu'il existe $B > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leqslant B^n$. Que dire alors du rayon de convergence de $\sum b_n z^n$?

3) Montrer que si f et g sont deux fonctions développables en série entière et telles que $g(0) \neq 0$, la fonction $z \mapsto \dfrac{f(z)}{g(z)}$ est développable en série entière.

4) Application à $f\ :\ x \mapsto \tan x$. Montrer que f est développable en série entière, déterminer le rayon de convergence et donner une formule de récurrence liant ses coefficients.

Exercice 1.10 : *

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Soit $f\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de f.

2) Montrer que $f(x) = o(e^x)$ quand $x \to +\infty$.

Mines 2016

II Exercices plus théoriques

Exerice 2.1 : **

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $s(n)$ le nombre de chiffres de n. Soit $S \ : \ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)} x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de S.
2) La série de terme général $\frac{s(n)}{n(n+1)}$ est-elle convergente ?

Mines 2014

Exercice 2.2 : Comparaison des rayons de convergence **

Soit a_n à termes positifs. On considère la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R_a ainsi que la série entière $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence R_b où b_n est fonction de a_n. Dans chacun des cas suivants, déterminer R_b en foncion de R_a.

1) $b_n = n a_n$.
2) $b_n = 2^n a_n$.
3) $b_n = a_n^2$.
4) $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$.
5) $b_n = a_{2n}$.
6) $b_n = \int_0^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Exercice 2.3 : **

Soit $f \ : \ x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.

1) Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est développable en série entière.
3) Montrer que tous les coefficients de Taylor en 0 de f sont rationnels.

X 2012, 2014

Exercice 2.4 : Fonctions absolument croissantes **

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. On la dit absolument croissante lorsqu'elle même est ses dérivées successives sont toutes positives.

1) Donner un exemple d'une telle fonction.
2) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, (également appelée formule de Taylor-Laplace), montrer que la série de Taylor de cette fonction converge sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.
3) On veut montrer que cette série converge vers f, i.e que f est développable en série entière. Soit $x > 0$, et soit $y > x$, montrer que $R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$, puis que $R_n(x) \to 0$.
4) En déduire que f est développable en série entière, et prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
5) Que conjecture-t-on si f est définie et absolument croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Démontrer votre conjecture en comparant $R_n(x)$ à $R_n(|x|)$ pour $x < 0$. Généraliser au cas d'une fonction absolument décroissante sur $\mathbb{R}$.
6) Que penser d'une fonction absolument croissante (ou décroissante) à partir d'un certain rang ?
7) Application : Montrer que la fonction $x \mapsto \tan x$ est développable en série entière et déterminer le rayon de convergence de sa série de Taylor.

Centrale 2009

Exercice 2.5 : **

Soit $f\ :\ x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est développable en série entière. Déterminer de deux façons son développement en série entière.
2) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
3) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Mines 2016

Exercice 2.6 : **

Soient $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, R$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et $f(z)$ sa somme. On suppose $R > 0$.

1) Soit, pour $0 < r < R : M(r) = \displaystyle\sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n|\, r^n \leqslant M(r)$.
2) On suppose que $R = +\infty$ et $|f|$ bornée sur $\mathbb{C}$. Que peut-on dire de f ?
3) Que dire de f s'il existe $(k,p) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $M(r) \leqslant kr^p$ pour tout $r > 0$?

X 2006, 2012

Exercice 2.7 : ***

On considère $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2^k}$.

1) Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
2) Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x^2)$.
3) Que dire de la limite en 1 si elle existe ?
4) S'il existe $x_0 \in]-1,1[$ tel que $f(x_0) > \frac{1}{2}$, montrer que f n'a pas de limite en 1.
5) On a : $f(0,995) > 0,5008$. Qu'en conclure ? Comment a-t-on pu vérifier cette inégalité ?

X 2006

Exercice 2.8 : **

On cherche à calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$.

1) Déterminer le rayon de convergence et trouver une équation différentielle du 1^{er} ordre satisfaite par f.
2) Résoudre l'équation précédente pour $x > 0$ et en déduire S.

Mines 2011, 2015

Exercice 2.9 : **

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire euclidien canonique. Si $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $|||A||| = \max\{\|AX\|\,;X \in \mathbb{R}, \|X\| \leqslant 1\}$.

1) Montrer que $|||\ |||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2) Soient $M \in \mathcal{M}_n(R)$ et $f\ :\ x \to \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ de rayon de convergence $R > |||M|||$.
   (a) Montrer que, pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, la série $\sum a_k (M^k)_{i,j}$ converge.
   (b) On suppose $|||M||| < 1$. Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{M}_n(R)$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{L^k}{k!} = I_n + M$.

X 2016

Exercice 2.10 : Nombres de Catalan **

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k}$. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et S la somme pour $|x| < R$.

1) On suppose $R > 0$. Montrer que $S(x) = x + S(x)^2$.
2) En déduire une expression de $S(x)$ ainsi que le rayon R.
3) Montrer : $\forall n \geqslant 2, a_n = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$.
4) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le produit P_n de n éléments $x_1, \ldots, x_n$ dans cet ordre. Dénombrer le nombre c_n de parenthésage possibles pour calculer ce produit par multiplications successives. Par exemple : $c_2 = 1; p_3 = (x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$ donc $c_3 = 2; p_4 = x_1(x_2(x_3x_4)) = x_1((x_2x_3)x_4) = (x_1x_2)(x_3x_4) = ((x_1x_2)x_3)x_4 = (x_1(x_2x_3))x_4$ donc $c_4 = 5$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1, a_n = c_n$.

Exercice 2.11 : ***

Si $n \in \mathbb{N}$, on note f_n le cardinal de l'ensemble $\left\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3, a + 2b + 3c = n\right\}$. Montrer que, pour $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n.$$

Centrale 2011, X 2016